112. Многочлены и комплексные числа

112.1. Указать многочлен с действительными коэффициентами, имеющий комплексный корень $3+4i$.

112.2. Доказать, что если комплексное число z является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряжённое число $\overline{z}$ также является его корнем, причём той же кратности.

112.3. (а) Найти многочлен второй степени с корнями $2+i$ и $3-i$ (коэффициенты могут быть комплексными). (б) Найти многочлен с действительными коэффициентами, имеющий два указанных корня (и, возможно, другие корни).

112.4. Верна ли формула для корней квадратного уравнения, если коэффициенты являются комплексными числами?

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами, не являющийся константой, разлагается на линейные множители.

112.5. Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение множителей первой или второй степени с действительными коэффициентами.

112.6. Укажите это разложение для многочленов x^4+1 и x^6-x.

112.7. Доказать, что многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.

112.8. Найти многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий корни $1-i$, $3+i$ и 2.

112.9.* Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами имеет корень $a+bi$ (a и b — целые), то его свободный член делится на a^2+b^2.

112.10. Доказать, что значение квадратного трёхчлена (с комплексными коэффициентами) в центре правильного треугольника на комплексной плоскости равно среднему арифметическому его значений в вершинах треугольника.

112.11.* Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для многочленов произвольной степени.

112.12.* Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами неотрицателен при всех действительных значениях x. Доказать, что его можно представить в виде суммы квадратов нескольких многочленов с действительными коэффициентами.

113. Контрольная работа

113.1. (лемма Гаусса) В произведении двух многочленов с целыми коэффициентами все коэффициенты делятся на простое число p. Доказать, что все коэффициенты одного из исходных многочленов тоже делятся на p.

113.2. Многочлен $x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ имеет корни x_1, x_2, x_3. Найти коэффициенты многочлена третьей степени со старшим коэффициентом 1 и корнями $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3$.

113.3. (а) Доказать, что существует единственный многочлен P_n, такой, что $\cos nx = P_n(\cos x)$. (б) Найти его старший коэффициент и свободный член.

113.4. Разложить на множители многочлены (а) $x^3 + x^2 + x + 1$ (б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

113.5. Многочлен с целыми коэффициентами равен единице в трех различных целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

113.6. Найти все рациональные корни многочлена $6x^5 - x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 13x - 12$.

113.7. Какие многочлены представимы в виде $P(x)(x^2 - 1) + Q(x)(x^2 + x)$?

113.8. (а) Любой действительный корень многочлена P является корнем многочлена Q. Следует ли из этого, что P делит Q? (б) Любой комплексный корень многочлена P является корнем многочлена Q. Следует ли из этого, что P делит Q?