113. Контрольная работа

113.1. (лемма Гаусса) В произведении двух многочленов с целыми коэффициентами все коэффициенты делятся на простое число p. Доказать, что все коэффициенты одного из исходных многочленов тоже делятся на p.

113.2. Многочлен $x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ имеет корни x_1, x_2, x_3. Найти коэффициенты многочлена третьей степени со старшим коэффициентом 1 и корнями $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3$.

113.3. (а) Доказать, что существует единственный многочлен P_n, такой, что $\cos nx = P_n(\cos x)$. (б) Найти его старший коэффициент и свободный член.

113.4. Разложить на множители многочлены (а) $x^3 + x^2 + x + 1$ (б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

113.5. Многочлен с целыми коэффициентами равен единице в трех различных целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

113.6. Найти все рациональные корни многочлена $6x^5 - x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 13x - 12$.

113.7. Какие многочлены представимы в виде $P(x)(x^2 - 1) + Q(x)(x^2 + x)$?

113.8. (а) Любой действительный корень многочлена P является корнем многочлена Q. Следует ли из этого, что P делит Q? (б) Любой комплексный корень многочлена P является корнем многочлена Q. Следует ли из этого, что P делит Q?