114. Перестановки

Перестановкой чисел $1, 2, \ldots, n$ называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Перестановки записывают в виде таблиц; например, перестановка $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2$ записывается как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; В верхней строке числа обычно располагают в порядке возрастания; под ними пишутся их образы, так что произвольная перестановка σ чисел $1, 2, \ldots, n$ запишется как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Произведение перестановок определяется как композиция отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Перестановки σ и τ ***коммутируют***, если $\sigma\tau = \tau\sigma$. ***Единичная перестановка*** (обозначается id) — это тождественное отображение, при котором все элементы остаются на месте. *Обратная* к перестановке σ перестановка определяется соотношением $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}$.

114.1. Найти произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

114.2. Указать две некоммутирующие перестановки.

114.3. (**а**) Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, 5$? Сколько из них оставляют число 1 на месте? (**б**) Сколько из них переводят 1 в 5? (**в**) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2)$? (**г**) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$?

114.4.* (Продолжение) (**а**) Для скольких их них выполнено равенство $\sigma^2 = \mathrm{id}$? (**б**) равенство $\sigma = \sigma^{-1}$? (**в**) равенство $\sigma^2 = \sigma^{-1}$?

114.5.* Пусть имеется некоторая последовательность поворотов граней кубика Рубика. Доказать, что, повторяя ее достаточно много раз, мы рано или поздно вернёмся к исходному положению.

114.6.* Программа кодирует текст на русском языке, заменяя (взаимно-однозначно) каждую букву на некоторую другую. Вася говорит, что не нуждается в программе декодирования, поскольку вместо этого можно применить программу кодирования несколько раз. Прав ли он?

114.7.* Доказать, что любая перестановка имеет конечный порядок: применяя её много раз, мы когда-нибудь получим тождественную перестановку.

114.8. Найти все возможные порядки перестановок множества из $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ элементов (***порядок*** — это минимальное число применений перестановки, которое даёт тождественную перестановку).

Перестановку, при которой $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \ldots \mapsto a_{k-1} \mapsto a_k \mapsto a_1$ (а остальные элементы остаются на месте), называют ***циклом длины*** k и обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Циклы длины 2 называют ***транспозициями***.

114.9. Пусть $\sigma = (123)$, $\tau = (34)$. Чему равно $\tau\sigma\tau^{-1}$?

114.10. Очевидно, два цикла $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ коммутируют, если они не пересекаются (среди $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$ нет общих элементов). Указать другой пример коммутирующих циклов.

114.11.* Описать все случаи, в которых циклы коммутируют.

114.12. (а) Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения попарно непересекающихся циклов, причем единственным (с точностью до порядка циклов) образом. (б) Найти это разложение для перестановок из задачи 1. (**в**) Как, используя это, решить задачу 7?

114.13. Сколько различных перестановок встречается среди степеней перестановки $(12345)(678)$?

114.14. Доказать, что порядок любой перестановки n элементов делит $n!$. Может ли он быть равен $(n!)$?

114.15.* Сколько существует перестановок чисел $1, \dots, 8$, которые представляются в виде произведения непересекающихся циклов длины 5 и длины 3?

114.16.* На книжной полке в беспорядке стоит собрание сочинений из n томов. За один шаг разрешается обменять любые два тома местами. Доказать, что за $n-1$ шагов всегда можно восстановить порядок. Можно ли это сделать (и сколько шагов может потребоваться), если разрешается менять местами только соседние (стоящие рядом на полке) тома? только тома с соседними (отличающимися на 1) номерами?

114.17.* (Продолжение) Доказать, что начав с какой-то расстановки книг, можно вернуться к исходному положению лишь после чётного числа обменов.

114.18. Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения транспозиций.

114.19. (Продолжение) Доказать, что в предыдущей задаче можно обойтись только транспозициями (12), (23), $\dots$, $(n-1, n)$.

114.20. (а) Доказать, что произведение нечётного числа транспозиций не может быть единичной перестановкой. (б) Доказать, что все перестановки делятся на два типа: одни представимы в виде произведения чётного числа транспозиций но не в виде произведения нечётного числа транспозиций (они называются *чётными*), другие — наоборот (они называются *нечётными*).

114.21. Назовём *беспорядком* в перестановке σ пару (i, j), для которой $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Доказать, что чётность перестановки определяется чётностью числа беспорядков.

114.22.* Что произойдёт с многочленом

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}),$$

(произведение $(x_j - x_i)$ по всем $j > i$), если в нём поменять местами x_1 и x_2? сделать циклическую замену $x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n \to x_1$? сделать произвольную перестановку переменных?

114.23. Доказать, что любая чётная перестановка представима в виде произведения циклов длины 3.

114.24.* Доказать, что можно единственным способом разбить перестановки на чётные и нечётные так, чтобы произведение двух чётных или двух нечётных было чётно, а произведение чётной и нечётной (в любом порядке) было нечётно.

114.25. Доказать, что чётных перестановок столько же, сколько нечётных.

114.26.* Как определить, будет ли заданная перестановка n элементов чётной или нечётной, сделав $O(n)$ действий? (Подсчёт числа беспорядков требует порядка n^2 действий.)

114.27.* (а) Доказать, что в игре «15» нельзя вернуть на место переставленные 14 и 15 (не вынимая фишек из коробочки, а только двигая их). (б) Сколько классов неэквивалентных (не сводящихся друг к другу движением фишек) позиций есть в этой игре?

114.28.* На n катушках намотано n магнитных лент красным концом (ракордом) наружу, а белым — внутрь. Есть дополнительная катушка и магнитофон, позволяющий перемотать ленту с одной катушки на другую (при этом внутри оказывается другой конец). Можно ли добиться, чтобы все ленты оказались белым концом наружу и пустой осталась та же дополнительная катушка? Можно ли добиться, чтобы при этом каждая лента осталась на своей катушке?

114.29.* Пусть σ_1 и σ_2 — две перестановки, фигурирующие в задаче 1 в качестве сомножителей. Найдётся ли такая перестановка τ, что $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$?

114.30. Пусть σ — произвольная перестановка. Докажите, что перестановки σ и $\tau\sigma\tau^{-1}$ раскладываются в произведение циклов одних и тех же длин.

114.31.* Дана перестановка $\sigma = (123)(67)(89)$ множества $\{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Сколько перестановок τ с ней коммутируют (это значит, что $\sigma\tau = \tau\sigma$)?

114.32.* Пусть σ и τ — перестановки из задачи 1. Найдётся ли такая перестановка ρ, что $\sigma\rho = \rho\tau$?

114.33.* Дана произвольная перестановка mn элементов, записанных в таблицу $m \times n$. Доказать, что её можно представить в виде композиции трёх перестановок, в которой первая и третья происходят по столбцам (новое положение любого элемента находится в том же столбце, что и старое), а вторая — по строкам.

114.34.* В словах, составленных из букв R и S, разрешается вычёркивать и дописывать (в любом месте) группы RRR и SS, а также заменять RRS на SR и наоборот. Сколько неэквивалентных (не переводимых друг в друга такими заменами) слов существует?

114.35.* (Продолжение) Тот же вопрос, если слова составлены из букв a и b, разрешается вычёркивать и добавлять aa и bb, а также заменять aba на bab.