116. Векторы

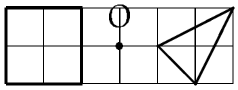
116.1. Даны два вектора $a = \overrightarrow{OA}$ и $b = \overrightarrow{OB}$. Выразить через них вектор $\overrightarrow{OC}$, если точка C делит отрезок AB в отношении $5:7$.

116.2. На плоскости фиксированы три точки O, A, B. Где находятся концы векторов $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, (**а**) если $\lambda + \mu = 1$? (**б**) ... и $\lambda, \mu \geqslant 0$?

116.3. На плоскости фиксированы четыре точки O, A, B, C. *Барицентрическими координатами* точки X относительно треугольника ABC называются числа (λ, μ, ν), для которых $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$. Показать, что (**а**) если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то барицентрические координаты любой точки X определены однозначно и не зависят от выбора точки O. (**б**) Указать геометрическую интерпретацию барицентрических координат в терминах площадей. (**в**) Точка D имеет барицентрические координаты $(1, 2, -2)$ относительно треугольника ABC. Каковы барицентрические координаты точки C относительно треугольника ABD?

116.4.* Указать физическую интерпретацию барицентрических координат (барицентр — центр тяжести).

116.5. В пространстве фиксированы четыре точки O, A, B, C. Где находятся концы векторов $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$, если $\lambda + \mu + \nu = 1$?



116.6. Где может находиться точка X, если $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, точка A находится внутри квадрата, а точка B — внутри треугольника (см. рисунок)?

116.7.* Даны три вектора a, b, c на плоскости. Доказать, что найдутся такие целые числа k, l, m, не равные одновременно 0, что вектор $ka + lb + mc$ имеет длину меньше $0{,}001$.

116.8.* На плоскости даны 100 векторов, по длине не превосходящие 1. Доказать, что сложить некоторые из векторов со знаком $+$, а другие со знаком $-$, чтобы сумма по длине не превосходила $1/1000$. (Сумма должна содержать хотя бы один вектор; вектор не может входить и со знаком $+$, и со знаком $-$, но может вовсе не входить в сумму.)

116.9.* На плоскости даны четыре точки A, B, C, D. Для каких точек O найдутся такие неотрицательные числа $\lambda, \mu, \nu, \varkappa$, что $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} + \varkappa\overrightarrow{OD} = 0$?

116.10. Для каждой из сторон многоугольника построили перпендикулярный ей вектор, направленный вовне многоугольника и по длине равный этой стороне. Доказать, что сумма этих векторов равна 0.

116.11.* Для каждой из граней многогранника построили перпендикулярный ей вектор, направленный вовне многогранника и по длине равный площади этой грани. Доказать, что сумма этих векторов равна 0. (Указание: задача имеет физический смысл.)

До сих пор мы говорили о векторах на плоскости и в пространстве. Дадим теперь общее определение. *Векторное пространство* — это множество V, элементы которого называют *векторами*. В нём выделен *нулевой вектор* 0 и определены операции сложения ($+$) и умножения на действительное число. Эти операции должны обладать такими свойствами ($x, y, z \in V$, λ, μ — числа):

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(ii) $x + y = y + x$,
(iii) $x + 0 = x$,
(iv) $1 \cdot x = x$,
(v) $0 \cdot x = 0$
(vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
(vii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
(viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

116.12. (Следствия из аксиом) Доказать, что (**а**) для всякого вектора x найдётся ***противоположный*** вектор y, для которого $x + y = 0$ (и потому вектора по сложению образуют группу); (**б**) $\lambda \cdot 0 = 0$ (здесь 0 обозначает нулевой вектор); (**в**) если $\lambda \neq 0$ и $x \neq 0$, то $\lambda x \neq 0$; (**г**) если сумма любых 5 из данных 7 векторов равна 0, то все векторы равны 0.

116.13. Многочлены образуют векторное пространство (с естественными операциями сложения и умножения на число). Что будет, если ограничить рассмотрение (**а**) многочленами степени не более 10? (**б**) многочленами степени ровно 10? (**в**) многочленами, имеющими корень 1? (**г**) многочленами, имеющими действительный корень?

116.14. Последовательности образуют векторное пространство. Что будет, если ограничить рассмотрение (**а**) сходящимися последовательностями? (**б**) сходящимися к 1 последовательностями? (**в**) сходящимися к 0 последовательностями? (**г**) ограниченными последовательностями? (**д**) возрастающими последовательностями? (**е**) последовательностями, у которых ряд из квадратов сходится?

Линейной комбинацией векторов $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ называется вектор $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Говорят, что вектор v ***линейно выражается*** через $v_1, \ldots, v_n$, если он представим в виде их линейной комбинации. Множество всех таких векторов называется ***линейной оболочкой*** векторов $v_1, \ldots, v_n$.

116.15. Закончить фразу: система линейных уравнений (относительно x, y, z)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда вектор ... линейно выражается через векторы ....

116.16. Как выглядит линейная оболочка двух векторов в трёхмерном пространстве?

116.17. Доказать, что линейная оболочка векторов v, w совпадает с линейной оболочкой векторов $v - w, v + w$.

116.18. Проверить следующие полезные (хотя и простые) свойства линейной оболочки: (**а**) если в системе $x_1, \ldots, x_n$ заменить какой-либо вектор x_i на вектор $x_i + \lambda x_j$ (для каких-то j и λ), то линейная оболочка системы не изменится; (**б**) если линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_n$ содержит вектор y, то она совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, \ldots, x_n, y$.

116.19. Найти линейную оболочку векторов $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$ в пространстве многочленов.

116.20. (Продолжение) Тот же вопрос для $1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3)$.

116.21. Функции на прямой образуют векторное пространство. (**а**) Лежит ли функция $\sin x$ в линейной оболочке функций $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$? (**б**) Тот же вопрос про функцию $\sin^2 x$.

116.22.* (Продолжение) Тот же вопрос про функцию $\sin^k x$ при произвольном k.

Набор векторов называется *линейно зависимым*, если если некоторая нетривиальная их линейная комбинация (не все коэффициенты нулевые) равна 0. В противном случае набор называется *линейно независимым*.

116.23. (а) В каком случае три вектора на плоскости линейно зависимы? (б) В каком случае три вектора в пространстве линейно зависимы?

116.24. (а) Доказать, что набор векторов линейно зависим в том и только том случае, когда один из векторов линейно выражается через остальные. (б) Можно ли в предыдущем утверждении заменить слова «один из векторов» на «первый вектор»?

116.25. Доказать, что векторы x, y линейно зависимы тогда и только тогда, когда векторы $x + 2y$ и $2x + y$ линейно зависимы.

116.26. Закончить фразу: система линейных уравнений (относительно x, y, z)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда векторы ....

116.27. (а) Доказать, что векторы задачи 19 линейно независимы. (б) Доказать, что векторы задачи 20 линейно независимы.

Координатное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ состоит из n-ок чисел с покоординатным сложением и умножением на число.

116.28. При каких a строки матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & a \end{vmatrix}$$

линейно зависимы?

116.29. (Продолжение) При каких a столбцы этой матрицы линейно зависимы?

116.30.* Имеется три литровых банки, заполненных на три четверти тремя разными красками (каждая — своей). Разрешается переливать краску из одной банки в другую, не переливая через край и тщательно перемешивая смесь. Так можно повторять многократно. Наша цель — получить смесь, в которую все три краски входят поровну. (а) Можно ли получить такую смесь во всех банках после конечного числа операций? (а) Можно ли получить такую смесь в одной из банок после конечного числа операций?

116.31.* Дано n различных чисел $c_1, \ldots, c_n$. Доказать, что функции $\exp(c_1x), \ldots, \exp(c_nx)$ линейно независимы.

116.32.* Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$ линейно независимы.

116.33. Доказать, что строки матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

линейно независимы, если все три числа a, b, c разные.

116.34.* (Продолжение) Тот же вопрос для столбцов этой матрицы.

116.35.* (Продолжение) Как обобщить это утверждение на матрицы большего размера?

116.36.* Доказать, что строки матрицы

$$\begin{vmatrix} a^x & b^x & c^x \\ a^y & b^y & c^y \\ a^z & b^z & c^z \end{vmatrix}$$

линейно независимы, если среди положительных чисел a, b, c и среди произвольных действительных чисел x, y, z нет одинаковых.

116.37.* Доказать, что максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов. (Следовательно, если в матрице $n \times n$ строки независимы, то и столбцы независимы, и наоборот.)