117. Базисы и размерности

Векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют *базис* в пространстве V, если они линейно независимы и порождают V (через них линейно выражается любой вектор пространства).

117.1. 1. Доказать, что в этом случае любой вектор единственным образом представим как линейная комбинация базисных.

117.2. Доказать, что базис можно эквивалентно определить как (а) максимальную линейно независимую систему векторов (становящуюся линейно зависимой при добавлении любого вектора); (б) минимальную систему, порождающую всё пространство (если удалить любой вектор, линейная оболочка перестанет совпадать со всем V).

117.3. Указать базис в пространстве (а) $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы чисел длины n (с покоординатным сложением и умножением на число); (б) многочленов степени не выше n; (в) наборов чисел длины n, у которых сумма равна нулю; (г) многочленов степени не выше n, имеющих корень 1.

Любые два базиса одного пространства имеют поровну элементов

Это утверждение удобно доказывать в такой форме: если вектора $y_1, \dots, y_k$ выражаются через $x_1, \dots, x_n$ и $k > n$, то эти k векторов линейно зависимы.

117.4. Доказать это утверждение, используя такой факт: однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение, если неизвестных больше, чем уравнений.

Другой вариант доказательства: если в выражениях $y_1, \dots, y_k$ через $x_1, \dots, x_n$ не встречается x_1, можно воспользоваться индукцией по n. Если же x_1 встречается, скажем, в выражении для y_1, то вектора $y_2 - c_2y_1, \dots, y_n - c_ny_1$ при подходящих $c_2, \dots, c_n$ выражаются через $x_2, \dots, x_k$, и снова можно воспользоваться предположением индукции.

117.5.* Провести это рассуждение полностью.

Ещё один вариант состоит в применении «леммы Штейница о замене»: если векторы $y_1, \dots, y_i$ линейно независимы и выражаются через $x_1, \dots, x_k$, то можно заменить какие-то i векторов среди $x_1, \dots, x_k$ на $y_1, \dots, y_i$, не изменив линейной оболочки.

117.6.* Доказать это утверждение (индукция по i) и вывести из него утверждение об одинаковом числе элементов в любых двух базисах.

117.7. Пространство V имеет базис из n элементов. Доказать, что любые $n+1$ векторов в нём линейно зависимы.

117.8. Доказать, что для произвольного векторного пространства V выполнено одно из двух: (1) V имеет конечный базис, и все его базисы имеют равное число элементов; (2) в V можно указать бесконечную систему линейно независимых векторов.

В первом случае число векторов в базисе называется *размерностью* пространства V (обозначается $\dim V$). Во втором случае пространство называют *бесконечномерным*.

117.9. Доказать, что размерность можно эквивалентно определить как максимальное число линейно независимых векторов или как минимальное число векторов, линейная оболочка которых есть всё пространство.

117.10. Рассмотрим пространство «фибоначчиевых последовательностей», в котором каждый член равен сумме двух предыдущих. Какова его размерность? Указать какой-либо базис в этом пространств (приведя явные формулы для образущих этот базис последовательностей)

117.11.* (Продолжение) (**а**) Тот же вопрос для пространства последовательностей, в которых $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$; (**б**) $\ldots x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$; (**в**) $\ldots x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n$

117.12. «Магическим квадратом» называют квадратную таблицу, заполненную числами, в которой суммы по всем столбцам, всем строкам и двум диагоналям равны. Магические квадраты данного размера образуют векторное пространство. Найти размерность этого пространства и указать базис для квадратов 2×2 и 3×3.

117.13.* Найти размерность пространства магических квадратов размера $n \times n$.

117.14.* Доказать, что пространство непрерывных функций на прямой, имеющих период 1, бесконечномерно.

Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ называется *подпространством* пространства V, если вместе с любыми двумя векторами x, y оно содержит их сумму $x+y$, и вместе с любым вектором x содержит векторы λx для всех чисел λ. (В этом случае W можно рассматривать как векторное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число.)

117.15. Какие подпространства бывают в (обычном) трёхмерном пространстве?

117.16. Существует ли подпространство в $\mathbb{R}^3$, содержащее векторы $\langle 1, 2, 3\rangle$ и $\langle 4, 5, 6\rangle$, но не содержащее вектора $\langle 7.8.9\rangle$?

117.17. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_n$ множество решений линейного однородного уравнения $a_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Какова размерность этого подпространства?

117.18. Рассмотрим в пространстве многочленов степени не выше n подпространство, образованное многочленами P, для которых $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$. Какова размерность этого подпространства?

117.19. Рассмотрим в пространстве многочленов степени не выше 10 подпространство, состоящее из многочленов P, делящихся без остатка на многочлен $x^5 + x + 1$. Какова размерность этого подпространства?

117.20. (**а**) Образуют ли периодические функции подпространство в пространстве всех функций с действительными аргументами и значениями? (**б**) Образуют ли периодические последовательности подпространство в пространстве всех последовательностей?

117.21. Пусть W_1 и W_2 — подпространства некоторого пространства W. Можно ли утверждать, что (**а**) их пересечение $W_1 \cap W_2$; (**б**) их объединение $W_1 \cup W_2$; (**в**) их сумма $W_1 + W_2$, состоящая из всех сумм вида $w_1 + w_2$ (где $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$), будут подпространствами?

117.22. Пусть W — подпространство конечномерного пространства V. Доказать, что любой базис в пространстве W можно дополнить до базиса в пространстве V. Вывести отсюда, что $\dim W \leqslant \dim V$ и равенство возможно, лишь если $V = W$.

117.23. Какова максимально возможная длина возрастающей цепочки подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k$ (все пространства различны) в n-мерном пространстве? Указать какую-либо цепочку максимальной длины в $\mathbb{R}^4$.

117.24. Говорят, что пространство V является ***прямой суммой*** своих подпространств W_1 и W_2, если их пересечение $W_1 \cap W_2$ содержит только нулевой вектор, а сумма $W_1 + W_2$ равна всему V. (**а**) Доказать, что в этом случае всякий вектор из V единственным образом представляется в виде суммы $w_1 + w_2$ (где $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$). (б) Доказать, что $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$

117.25.* (Продолжение) Определить понятие прямой суммы трёх подпространства и доказать аналогичное утверждение.

117.26. Доказать, что пространство всех функций с действительными аргументами и значениями есть прямая сумма подпространства чётных функций и подпространства нечётных функций. (Функция f называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$ при всех x, и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$ при всех x.)

117.27. Доказать, что для произвольных подпространств W_1 и W_2 пространства W выполнено равенство

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

117.28.* Как написать аналогичное равенство для трёх подпространств?

117.29.* Пусть A, B, C — три подпространства одного пространства. Доказать, что

$$\dim A + \dim(A + B + C) \leqslant \dim(A + B) + \dim(A + C).$$