2. Абсолютная величина

Абсолютной величиной (или *модулем*) числа x называется само x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$. Обозначение: $|x|$. (Например, $|2| = |-2| = 2$.)

2.1. Дима считает, что $|-a|$ при $a < 0$ равно a, а Володя — что $-a$. Кто из них прав?

2.2. Нарисовать на числовой оси точки x, для которых $|x| > 1$.

2.3. Как записать расстояние между точками числовой оси с координатами x и y, используя знак абсолютной величины?

2.4. Известно, что $|x| = 5$, $|y| = 3$. Какие значения может принимать $|x+y|$? Тот же вопрос для $|x-y|$ и $|x \cdot y|$.

2.5. Нарисовать на числовой оси точки x, для которых $|x-5| \leqslant 3$.

2.6. Нарисовать на числовой оси точки x, для которых $|x+1|+|x+2| = 1$.

2.7. Точки A и B имеют координаты 1 и 7. Найти координату точки C, если расстояние AC в полтора раза больше расстояния BC. (Указать все варианты.)

2.8. Решить уравнение

$$2|x-1| = 3|x-7|$$

2.9. Почему в задачахx̃ef1abs-7 и 2.8 ответ одинаковый?

* * *

2.10. Найти выражение, содержащее буквы x и y, арифметические операции и знаки абсолютной величины, значение которого равно наибольшему из чисел x и y.

2.11. Даны два числа a и b. Может ли так случиться, что среди утверждений $a \leqslant b$, $-a \leqslant b$ и $|a| \leqslant b$ два верных и одно неверное?

2.12. Какие значения может принимать $x+y+z+t+u$, если $|x| = 1$, $|y| = 2$, $|z| = 4$, $|t| = 8$, $|u| = 16$?

2.13. Доказать, что

$$|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$$

при любых x, y и z.

2.14. Известно, что $|x+2| \leqslant 3$, $|x-4| \leqslant 5$. Доказать, что $|x| \leqslant 1$.

2.15. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6|$$

При каких x оно достигается?

2.16. На прямом шоссе через равные промежутки стоят 6 домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

2.17. По кругу расположены 7 коробков, в которых лежат 19, 9, 26, 8, 18, 11, 14 спичек (считая по часовой стрелке). За один шаг разрешается переложить спичку из любого коробка в соседний. Какое наименьшее число шагов необходимо, чтобы уравнять число спичек во всех коробка́х?

2.18. Известно, что $|x+2y| \leqslant 4$, $|x+y| \leqslant 3$. Какие значения может принимать x?

2.19. На прямой дорожке стоят несколько школьников. Вдоль неё ходит учитель физкультуры. По сигналу «Хоп!» каждый из школьников бежит к тому месту, где стоит учитель, а затем возвращается на своё место. Так повторяется несколько раз. Доказать, что наибольшее расстояние пробежал один из двух крайних школьников.

2.20. Какое наибольшее число решений может иметь уравнение

$$||||x-a|-b|-c|-d| = e$$

относительно x при фиксированных a, b, c, d, e?

2.21. По кругу написано 30 чисел. Между каждыми двумя записали модуль их разности, а исходные числа стёрли. Доказать, что полученные 30 чисел можно разделить на две группы с равной суммой.