16. Неравенства и оценки

16.1. Все стороны треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 100?

16.2. Все стороны треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

16.3. Все высоты треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

16.4. Сумма нескольких положительных чисел больше 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,001?

16.5. Сумма нескольких положительных чисел меньше 1. Может ли сумма их квадратов быть больше 100?

16.6. Сумма двух положительных чисел больше 10. Может ли их произведение быть меньше 0,001?

16.7. Произведение двух положительных чисел больше 10. Может ли их сумма быть меньше 0,001?

16.8. Стороны прямоугольника увеличили на сантиметр. Может ли его площадь увеличиться более чем на квадратный метр?

16.9. Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадраты отличаться более чем на 10?

16.10. Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадратные корни отличаться более чем на 10?

* * *

16.11. Все медианы треугольника меньше 1, может ли его площадь быть больше 100?

16.12. Все высоты треугольника меньше 1, может ли его площадь быть больше 100?

В этом листке собраны задачи, в которых нужны грубые оценки — надо понять, может ли что-то быть очень большим, когда что-то другое очень мало.

В любой из них или есть (почти очевидный) пример, либо простая причина, по которой этого не может быть, и в этих случаях в неравенстве есть большой запас.

Задачи 16.8–16.10 можно будет вспомнить, говоря о равномерной непрерывности умножения, возведения в квадрат и квадратного корня.

В задаче 16.11 полезно вспомнить, что медианы являются сторонами треугольника, площадь которого составляет $3/4$ площади исходного.