19. Рекуррентные формулы

19.1. Пешка стоит в углу доски 5×5 на поле $\langle 1, 1\rangle$. За один ход ей разрешается сдвинуться вправо или вверх. Найти для каждого поля доски, сколькими способами пешка может на него попасть (например, на поле $\langle 2, 2\rangle$ можно попасть двумя способами: вправо – вверх и вверх – вправо).

19.2. (Продолжение) Тот же вопрос, если можно идти вправо, вверх, и по диагонали (вправо-вверх).

19.3. (Продолжение) Тот же вопрос, если можно идти вправо и вверх и нельзя делать два шага вправо подряд.

19.4. Обозначим через $a(m, n)$ количество различных последовательностей, составленных из m нулей и n единиц. Доказать, что $a(m, n) = a(m-1, n) + a(m, n-1)$ при любых $m, n > 0$. Составить таблицу $a(m, n)$ для $0 \leqslant m, n \leqslant 5$.

19.5. Для $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ найти количество (**а**) всех последовательностей нулей и единиц длины n; (**б**) тех из них, в которых нет двух идущих подряд нулей; (**в**) тех из них, в которых нет трёх идущих подряд нулей;

19.6. Сколькими способами можно расставить скобки в произведении n сомножителей? Для $n = 3, 4, 5$ это число было подсчитано; сделайте это для $n = 6, 7, 8$. (Указание. Последнее умножение может быть в одной из $n - 1$ позиций, поэтому искомое число равно сумме...)

19.7. Рассмотрим все разбиения целого положительного числа n в сумму целых положительных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, мы считаем за одно). Подсчитайте количество разбиений числа n, у которых все слагаемые не превосходят m, при m и n, не превосходящих 8. Ответом должна быть таблица 8×8. (Указание. Все разбиения числа n, в которых слагаемые не превосходят m, делятся на две группы: где слагаемые не превосходят $m - 1$ и где наибольшее слагаемое равно m.)

* * *

19.8. На окружности имеется $2n$ точек. Сколькими способами их можно соединить n непересекающимися хордами? Подсчитать это число для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 7$.

19.9. Имеется выпуклый n-угольник. Сколькими способами его можно разрезать на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали? Подсчитать это число для $n = 3, 4, 5, \ldots, 8$.

19.10. Кольцевой забор состоит из n досок, каждую из них надо покрасить в один из трёх цветов, причём соседние доски должны быть покрашены в разные цвета. Сколькими способами можно это сделать для $n = 3, 4, 5, 6$? Найти общую формулу для произвольного n.

19.11. На контурной карте нарисовано несколько стран, каждую из которых надо раскрасить в один из n цветов, причём соседние страны должны быть раскрашены в разные цвета. Доказать, что количество вариантов раскраски есть многочлен от n.

19.12. Рассмотрим раскраски забора из n досок в три цвета так, чтобы соседние доски были раскрашены в разные цвета. Пусть d_n –число способов раскрасить забор для фиксированных и различных цветов крайних досок, а d_n — то же число для одинаковых цветов крайних досок. Найти e_n и d_n для $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

19.13. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n$, если все x_i должны быть равны 0 или 1? Подсчитать ответ для $1 \leqslant m, n \leqslant 7$.

19.14. (Продолжение) Тот же вопрос, если все x_1 должны быть равны 0, 1 или 2.

19.15. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифра равна сумме последних трёх. Подсчитать число счастливых билетов. (Указание. Один из возможных способов: подсчитайте для двузначных и четырёхзначных билетов, сколько имеется билетов с данной разностью между суммами первой и второй половин.)

19.16. Для $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ найти количество последовательностей нулей и единиц длины n, в которых нет комбинации `001`; тот же вопрос для комбинации `0101`.

Этот листок скорее непривычный (для преподавателей), чем трудный: написать правильную рекуррентную формулу и сосчитать по ней всё требуемое довольно просто.

Задача 19.1 — стандартная интерпретация повернутого треугольника Паскаля, задача 19.2 аналогична, только формула в ней другая. В задаче 19.3 снова появляется треугольник Паскаля, только иначе расположенный. Задача 19.4 представляет собой переформулировку задачи 19.1. В задаче 19.5 достаточно вычислить несколько первых членов, чтобы понять закономерность: каждый член равен сумме двух предыдущих, после чего можно её объяснить, рассмотрев две возможности для первого члена. Задача 19.6 есть один из вариантов для чисел Каталана (другие варианты предлагаются в первых двух дополнительных задачах). Наконец, задача 19.7 предлагает рекуррентную формулу, позволяющую подсчитать число разбиений.