20. Взаимно однозначные соответствия

20.1. Сколько (**а**) пятизначных чисел, содержащих только цифры 1 и 2? (**б**) вариантов освещения коммунальной кухни, где у каждой из пяти соседок — своя лампочка? (**в**) слагаемых в произведении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$? (**г**) подмножеств у пятиэлементного множества (в подмножество каждый элемент может входить или не входить, порядок элементов не учитывается)? Как убедиться, что во всех этих задачах ответ одинаков, не решая ни одной из них?

20.2. (**а**) Сколькими способами можно назначить двух дежурных среди пяти зазевавшихся школьников? (**б**) Город имеет форму прямоугольника 3×2, который разбит прямыми улицами на квадраты 1×1. Сколько кратчайших путей ведут из одного угла в противоположный? (**в**) Какой коэффициент окажется при a^3b^2, если раскрыть скобки в выражении $(a+b)^5$, и привести подобные? (**г**) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове ОГОГО? (**д**) Сколько двухэлементных подмножеств у пятиэлементного множества? (**е**) Сколько трёхэлементных подмножеств у пятиэлементного множества? Как убедиться, что во всех этих задачах ответ одинаков, не решая ни одной из них?

20.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+y+z=3$? Почему в этой задаче ответ тот же самый, что и в предыдущей? (Указание: ОГОГО $\leftrightarrow$ $1+1+1$, ГГООО $\leftrightarrow$ $0+0+3, \ldots$)

20.4. Почему число решений уравнения $x+y+z=30$ в положительных целых числах равно числу решений уравнения $x+y+z=27$ в неотрицательных целых числах?

20.5. Каких подмножеств больше у множества $\{1,2,3,\ldots,9,10\}$ — содержащих 1 или не содержащих 1?

20.6. Все последовательности из 20 нулей и единиц делятся на две группы — те, в которых чётное число единиц, и те, в которых нечётное. Каких больше?

20.7. Сколько существует шестизначных автобусных билетов, сумма цифр которых чётна?

* * *

20.8. Доказать, что «счастливых» автобусных билетов (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних) столько же, сколько автобусных билетов с суммой цифр 27.

20.9. Доказать, что число разбиений выпуклого n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями равно числу способов расстановки скобок в произведении $n-1$ сомножителей.

20.10. Доказать, что количество разбиений целого положительного числа n на целые положительные слагаемые, не превосходящие k, равно количеству разбиений числа n на не более чем k целых положительных слагаемых.

20.11. Сколько существует автобусных билетов, сумма цифр которых делится на 3?

Во всех задачах этого листка требуется установить взаимно однозначное соответствие между конечными множествами. (Кроме задачи 20.11: несмотря на сходную формулировку с задачей 20.7 надо действовать иначе, вспомнив признак делимости на 3.)

В задаче 20.9 триангуляции и расстановки скобок — это две реализации чисел Каталана, и соответствие такое: напишем на всех сторонах многоугольника, кроме одной, сомножители, а триангуляция определяет порядок вычисления произведения.