21. Принцип Дирихле

21.1. В математической олимпиаде участвовало 900 школьников. Доказать, что можно найти трёх участников, у которых общий день рождения.

21.2. В классе 25 школьников, которые писали четыре контрольные; ни один школьник не прогулял ни одну из контрольных, и все они получили четвёрки и пятёрки. Доказать, что найдутся два школьника, у которых результаты за все контрольные одинаковы.

21.3. Двенадцати школьникам досталось 65 конфет. Доказать, что какие-то двое школьников съели одинаковое число конфет.

21.4. В квадрате со стороной 10 выбрано 100 точек. Может ли так случиться, что расстояние между любыми точками не меньше 2?

21.5. Боря утверждает, что может отгадать любое целое число от 1 до 100, задав не более 6 вопросов, требующих ответа «да» или «нет». Почему он не прав? Сколько вопросов было бы достаточно? Почему?

21.6. На контрольной каждую задачу решило не меньше половины школьников. Доказать, что есть школьник, решивший не меньше половины задач.

21.7. Доказать, что равносторонний треугольник нельзя накрыть двумя равносторонними треугольниками меньшего размера.

21.8. Написано 10 положительных чисел, причём сумма любых трёх из них больше 6. Доказать, что сумма всех чисел больше 20.

21.9. Какое максимальное количество целых чисел можно написать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делилась на 37?

* * *

21.10. Футбольный турнир проводится в один круг (каждая команда играет с каждой). Доказать, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

21.11. В клетках шахматной доски 100 на 100 написаны целые числа, причём числа в соседних клетках отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске есть три одинаковых числа.

21.12. Имеется 11 бесконечных десятичных дробей. Доказать, что найдутся две дроби, совпадающие в бесконечном числе разрядов.

21.13. Имеется 4 различных по весу камня. Как упорядочить камни по весу, сделав не более 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Можно ли придумать способ, гарантирующий это за 4 взвешивания?

21.14. Та же задача для 5 камней.

21.15. В таблице из 11 строк и 10 столбцов написаны целые числа. Доказать, что можно вычеркнуть некоторые строки (не все — возможно, ни одной), после чего сумма чисел в каждом столбце будет чётной.