22. Треугольник Паскаля

Число k-элементных подмножеств n-элементного множества называется *числом сочетаний из* n *по* k, и обозначается C_n^k (или $\binom{n}{k}$).

22.1. Чему равны C_n^0 и C_n^n? Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $n \geqslant 0$ n $0 \leqslant k \leqslant n$.

22.2. Доказать, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

22.3. Доказать, что

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

22.4. С использованием обозначения C_n^k записать (**а**) число последовательностей из a нулей и b единиц; (**б**) число решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = d$, где все $x_1, \ldots, x_m$ равны 1 или 2 (здесь m и d — целые положительные числа, $m \leqslant d$).

22.5. С использованием обозначения C_n^k записать число решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = d$ (**а**) в целых неотрицательных числах; (**б**) в целых положительных числах.

22.6. Переплётчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать? (Не обязательно использовать все цвета.)

22.7. В *треугольнике Паскаля*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

вычислить первые 7 строк.

22.8. Доказать, что в треугольнике Паскаля каждое число равно сумме двух стоящих над ним.

22.9. Вычислить сумму чисел в первых 7 строках треугольника Паскаля. Объяснить наблюдаемую закономерность.

22.10. Знакопеременная сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля равна нулю. (Другими словами: сумма чисел, стоящих на чётных местах в любой строке, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах.) Почему?

* * *

22.11. Доказать, что произведение любых 11 последовательных делится на 11! (факториал 11).

22.12. Сколько есть подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, для которых выполнено такое условие: никакие два их элемента не отличаются ровно на 1?

22.13. Сколькими способами можно переставить буквы в слове БРАКОДЕЛ, если требуется, чтобы и гласные, и согласные (по отдельности) шли в алфавитном порядке?

22.14. Вычислить 11^2, 11^3, 11^4. Сравнить результат с треугольником Паскаля. Объяснить наблюдаемую закономерность. Будет ли она продолжаться и дальше? Тот же вопрос для чисел 1001^2, 1001^3,...

22.15. Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком из нечётных чисел? целиком (не считая краёв) из чётных чисел?

22.16. Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краёв) из чисел, делящихся на 3?

22.17. Возьмём любое число в треугольнике Паскаля и сложим все элементы, начиная с него и идя по прямой вверх-налево. Сумма окажется равной элементу, стоящему снизу под ним. Почему?