23. Комбинаторика и алгебра

23.1. Доказать, что коэффициент при x^{10}, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных в $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^3$, равен числу решений уравнения $a+b+c=10$ в целых неотрицательных числах.

23.2. Найти коэффициент при $abcde$ в $(a+b+c+d+e)^5$.

23.3. Доказать, что число способов разменять 20 долларов бумажками в 1, 2 и 5 долларов равно коэффициенту при x^{20} в

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{20})(1+x^2+x^4+x^6\ldots+x^{20})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$$

23.4. Доказать формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

23.5. Используя формулу бинома, доказать, что сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля есть степень 2 и что знакопеременная сумма чисел в любой строке равна 0.

23.6. Найти коэффициент при $a^{10}b^{15}c^{20}$ в $(a+b+c)^{45}$.

23.7. Гоша вычислил произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$. Тоша доказал, что, имея по одной гире в 1, 2, 4, 8 и 16 граммов, можно набрать любой вес от 1 до 31 грамма, причём единственным способом. Юра сказал Гоше и Тоше: «Вы решали одну и ту же задачу». Почему он так сказал?