14. Общая мера

Два отрезка *соизмеримы*, если они имеют *общую меру* — третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

14.1. Доказать, что прямоугольник, стороны которого соизмеримы, можно разрезать на квадраты.

14.2. Лёша дал такое определение: два отрезка соизмеримы, если существует третий, в котором каждый из двух укладывается целое число раз. Равносильно ли это определение обычному?

14.3. Доказать, что отрезки a и b соизмеримы в том и только том случае, когда a и $a + 2b$ соизмеримы.

14.4. От прямоугольника отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, столько раз, сколько можно (мы будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида и так далее. Сколько и каких квадратов получится, если начать с прямоугольника со сторонами 75 и 21?

14.5. (Продолжение) Применяя операцию Евклида, прямоугольник разрезали на большой квадрат, два квадрата поменьше и два совсем маленьких. Найти отношение сторон исходного прямоугольника.

14.6. Доказать, что если стороны прямоугольника соизмеримы, то применяя операцию Евклида, мы в конце концов разрежем его на квадраты.

14.7. Доказать, что если применение операции Евклида разрезает прямоугольник на некоторое (конечное) число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой.

14.8. (Продолжение) Доказать, что сторона самого маленького квадрата является *наибольшей* общей мерой и любая другая общая мера укладывается в ней целое число раз.

Результаты задач 14.6 и 14.7 позволяют дать эквивалентное определение соизмеримости: стороны прямоугольника несоизмеримы, если к нему можно применять операцию Евклида бесконечное число раз.

14.9. Говорят, что стороны прямоугольника находятся в отношении «золотого сечения», если после отрезания от него квадрата получается прямоугольник, подобный исходному (имеющий то же отношение сторон). Найти отношение золотого сечения.

14.10. Доказать, что отношение золотого сечения иррационально, то есть не выражается дробью с целыми числителем и знаменателем.

14.11. Применяя операцию Евклида к некоторому прямоугольнику, получили один большой квадрат, два квадрата поменьше, два еще меньших, два совсем маленьких и так далее (на каждом следующем шаге получалось два квадрата и процесс никогда не кончился). Найти отношение сторон исходного прямоугольника.

14.12. Сколько квадратов разных размеров будет получаться, если применять операцию Евклида к прямоугольнику с отношением сторон $\sqrt{3} : 1$?

14.13. Используя предыдущие задачи, доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ иррациональны.

* * *

14.14. Доказать, что отрезки a и b соизмеримы в том и только том случае, когда $2a + 3b$ и $5a + 7b$ соизмеримы.

14.15. Применяя операцию Евклида к некоторому прямоугольнику, получили 10 квадратов разного размера и два совсем маленьких квадрата. Найти отношение сторон исходного прямоугольника и выяснить, больше или меньше оно золотого сечения.

14.16. Как отложить на прямой отрезок в 3 см, имея металлический прямоугольник со сторонами 75 и 21 сантиметров?

14.17. К прямоугольнику, стороны которого не больше 1 метра, 20 раз применили операцию Евклида. Доказать, что стороны оставшегося прямоугольника не превышают 1 мм.

14.18. Кузнечик умеет прыгать по прямой в любую сторону на расстояние 1 м и на расстояние $\sqrt{2}$ м. Доказать, что он может попасть в точку, отстоящую менее чем на 1 мм от исходной, но не совпадающую с ней.

14.19. Из угла прямоугольного биллиарда пускают шар под углом 45°, который отражается от стенок по закону «угол падения равен углу отражения». Доказать, что шар снова попадёт в один из углов в том и только случае, если стороны билларда соизмеримы. (Шар считается точкой.)

14.20. Прямоугольник со сторонами 1 и π разрезают на квадраты описанным способом. Используя калькулятор, подсчитать число квадратов первых трёх уровней. При этом остаётся прямоугольник с почти равными сторонам. Как надо изменить отношение сторон исходного прямоугольника, чтобы остаточный прямоугольник стал квадратом?

14.21. Отношение двух отрезков равно 1,625, а меньший из них равен $\sqrt{2}$. (**а**) Найти их наибольшую общую меру. (**б**) Найти наименьший отрезок, в котором оба они укладываются целое число раз.

14.22. Отрезок a соизмерим с отрезками b и c. Следует ли отсюда, что отрезки b и c соизмеримы между собой?

14.23. В трапеции средняя линия соизмерима с одним из оснований. Следует ли отсюда, что она соизмерима с другим основанием?

14.24. Будут ли следующие пары отрезков соизмеримы: (**а**) $2+3\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$; (**а**) $1/\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; (**а**) $1/(\sqrt{2}-1)$ и $2+\sqrt{2}$; (**а**) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$?

Идея этого цикла — показать алгоритм Евклида в его первоначальном варианте, с отрезками вместо чисел. Тем самым потом, для целых чисел, он будет уже знаком.

Важно, что здесь это комбинируется с идеей несоизмеримости и её конструктивным представлением как бесконечным процессом поиска общей меры.

В задачах 14.1–14.3 мы сознательно избегаем слова «рациональный» — в надежде, что школьники сами сформулируют правило: два отрезка соизмеримы, если отношение их длин рационально. (Если это не произойдет, разумно обратить их внимание, хотя и ненавязчиво.) Впрочем, если они будут решать задачу 14.2, говоря, что если m отрезков a равны n отрезкам b, то n-ая часть a равна n-ой части b, и то хорошо.

Задачи 14.4 и 14.5 предназначены для того, чтобы школьники поняли, в чём состоит шаг алгоритма Евклида — никаких трудностей тут нет.

Задачи 14.6–14.8 представляют собой формулировку основного утверждения об алгоритме Евклида, разбитую на части.

Далее в разных вариантах обыгрывается одна и та же идея — применение алгоритма Евклида для доказательства иррациональности квадратных корней. Вообще-то этот метод применим к любой квадратичной иррациональности, так как есть теорема, что последовательность остатков (чисел в цепной дроби) периодична, и тем самым можно явно в этом убедиться и установить, что число иррационально.

Самый простой случай — это золотое сечение (задачи 14.9–14.10). В задачах 14.11 и 14.12 разбираются два других случая ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), причём в разных направлениях: от последовательности периодов к числу и наоборот. (Непонятно, что окажется труднее для школьников).

Задача 14.14 представляет собой более сложный вариант задачи 14.3 (просто вычитания недостаточно, требуется деление).

Задача 14.15 касается чисел Фибоначчи как цепных дробей, подходящих дробей и их чередования вокруг значения цепной дроби.

Задачи 14.16–14.18 предлагают доказательство плотности чисел вида $a + b\alpha$ для иррационального α. Сначала объясняется, что результат алгоритма Евклида есть линейная комбинация (задача 14.16), затем — что он может быть сколь угодно мал, и затем предлагается это комбинировать. (Кстати, решение задачи 14.17 такое: большая сторона прямоугольника после двух операций Евклида уменьшается по крайней мере вдвое. В самом деле, если меньшая сторона меньше половиины большей, то это происходит уже не следующем шаге, если нет — то через один.)

Задача 14.19 даёт ещё одну ситуацию, где проявляется соизмеримость. Вероятно, школьники заметят, что она разворачивается в движение шара по прямой на целочисленной решётке.

Наконец, задача 14.20 посвящена такому любопытному обстоятельству: у числа π есть известное приближение 355/113, которое оказывается гораздо ближе к нему, чем это можно было бы ожидать для подходящей дроби (на одном из шагов получается остаток, почти равный 1). Чтобы её решать, полезен калькулятор (хотя Эйлер или Гаусс обошлись бы без него)

Задачи 14.21–14.24 предлагались на контрольной.