9. Делимость

9.1. Доказать, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

9.2. Доказать, что число $a^3 - a$ при любом целом a делится на 3.

9.3. Доказать, что сумма $84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90$ делится на 7 и на 87.

9.4. Делится ли число 12345678910 на 8?

9.5. Найти трёхзначный и семизначный делители числа 103103103.

9.6. Указать верные среди следующих утверждений: (**а**) если a делится на c, а b не делится на c, то $a + b$ не делится на c; (**б**) если a делится на c, а b не делится на c, то ab делится на c; (**в**) если a и b не делятся на c, то $a + b$ не делится на c; (**г**) если a и b не делятся на c, то ab не делится на c; (**д**) если ab делится на c, то хотя бы одно из чисел a и b делится на c.

9.7. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, что $ab = cd$ и что a делится на c. Доказать, что d делится на b.

9.8. Известно, что $a + 2$ и $13 - b$ делятся на 11. Доказать, что $a + b$ делится на 11.

9.9. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся на 2? не делятся на 3? не делятся ни на 2, ни на 3?

9.10. Найти все пары целых чисел x и y, для которых (**а**) $x^2 - y^2 = 9$; (**б**) $x^2 - y^2 = 12$.

9.11. Найти все целые числа от 1 до 50, у которых количество целых положительных делителей (считая единицу и само число) нечётно. Пример: число 4 имеет 3 делителя $(1, 2, 4)$ и потому подходит.

* * *

9.12. Можно ли разрезать шахматную доску 8×8 на прямоугольники 3×1?

9.13. Известно, что a^2 делится на $a - b$. Доказать, что и b^2 делится на $a - b$.

9.14. Числа a и b целые, причём $2a + 3b$ делится на 7. Доказать, что $a + 5b$ также делится на 7.

9.15. Целые числа x, y таковы, что $29x = 41y$. Доказать, что число $x + y$ делится на 10.

9.16. Найти все пары целых чисел x и y, для которых $xy - x + 4y = 16$.

9.17. Доказать, что произведение любых четырёх последовательных натуральных чисел делится на 24.

9.18. Число a чётно, но не делится на 4. Доказать, что количество чётных делителей числа a равно количеству нечётных делителей числа a. (Например, при $a = 10$ есть два чётных делителя 2 и 10 и два нечётных делителя 1 и 5.)

9.19. Доказать, что любое шестизначное число вида $abcabc$ (три первые цифры совпадают с тремя последними) делится на 7, 11 и 13.

9.20. Доказать, что при любом целом $a > 1$ число $a^{100} - 1$ делится на $a - 1$.

9.21. Доказать, что при любом целом $a > 1$ число $a^{99} + 1$ делится на $a + 1$.

9.22. Миша придумал теорему: число нечётных делителей числа есть делитель числа чётных делителей этого числа, причём частное равно число чётных делителей числа, не имеющих нечётных делителей, больших 1. Правильна ли эта теорема?

9.23. Число m не делится ни на 2, ни на 3. Доказать, что $m^2 - 1$ делится на 24.

9.24. Найти 4 целых положительных числа с таким свойством: любое число делит произведение остальных, увеличенное на 1. Можно ли найти 5 чисел с таким свойством? а 6?