6. Четные и нечётные числа

6.1. Каких чисел больше среди чисел от 1 до 1000 — чётных или нечётных?

6.2. Можно ли так расставить знаки в выражении

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 9 \pm 10$$

чтобы получился нуль?

6.3. Почему произведение двух нечётных чисел нечётно?

6.4. Заполнить «таблицу сложения»

	Ч	Н
Ч	Ч	
Н		

(например, в левой верхней клетке стоит буква Ч, которая означает, что сумма двух чётных чисел чётна). Как выглядит аналогичная таблица для умножения?

6.5. При каких n сумма

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

чётна?

6.6. При каких n сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

чётна?

6.7. Может ли квадрат целого числа быть чётным, но не делиться на 4?

* * *

6.8. Придя утром в класс, некоторые из школьников пожали друг другу руки. Доказать, что число школьников, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

6.9. В контрольной участвовало 25 человек. Каждый участник получил тройку, четвёрку или пятёрку, причём средний балл оказался равен 4. Доказать, что один из учеников получил четвёрку.

6.10. По окружности написано несколько чисел. Среди произведений соседних чисел ровно 5 отрицательных. Доказать, что одно из чисел равно 0.

6.11. На квадратной доске 7×7 расставлено 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали квадрата. Доказать, что одна из шашек стоит на этой диагонали.

6.12. (Продолжение.) Доказать, что если расположение шашек симметрично относительно обеих диагоналей квадрата, то в центральной клетке стоит шашка.

6.13. Окружность разделена точками на 99 дуг, из которых 3 имеют длину 3 см, ещё 3 имеют длину 2 см, и оставшиеся 3 имеют длину 1 см. Доказать, что какие-то две из точек деления диаметрально противоположны.

6.14. Может ли прямая пересекать все стороны невыпуклого 11-угольника (не проходя через его вершины)?

6.15. Могут ли 9 шестерёнок, сцепленных по кругу, вращаться?

6.16. Все кости домино расположили в цепь. Доказать, что на концах цепи стоят равные цифры.

6.17. Улитка каждые 15 минут поворачивает на 90° (а в промежутках ползёт по прямой). Доказать, что она может вернуться в исходную точку лишь через целое число часов.

6.18. На прямой имеется 11 точек, причём сумма расстояний от них до некоторой точки A равна сумме расстояний от них до другой точки B. Доказать, что хотя бы одна из этих 11 точек лежит на отрезке AB.

6.19. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Доказать, что хотя бы у одного из сидящих оба соседа — мальчики.

6.20. Можно ли разрезать шахматную доску без клеток $a1$ и $h8$ на прямоугольники 1×2?

6.21. Три кузнечика на прямой играют в чехарду. Кажду секунду один из них перепрыгивает через другого (но не через двух). Доказать, что они могут вернуться в исходное положение только через чётное число секунд.

6.22. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots 57$. Разрешается заменить любые два числа на их сумму или разность, пока не останется одно число. Может ли это число быть нулём?

6.23. По кругу написаны 4 целых числа. Между каждыми двумя записывают абсолютную величину их разности, а исходные числа стирают. Так повторяют несколько раз. Доказать, что рано или поздно останутся одни нули.

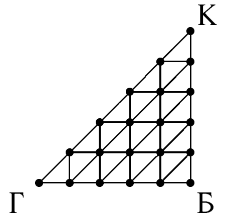

Рис. 1

6.24. (Лемма Шпернера) Треугольник КГБ (рис. 6.1) разрезан на меньшие, вершины которых окрашены в красный, голубой и белый цвета. При этом известно, что вершина К — красная, Г — голубая и Б — белая. Кроме того, известно, что вершины на стороне ГБ либо голубые, либо белые, на стороне КБ — либо красные, либо белые, на стороне ГК — либо голубые, либо красные. Доказать, что хотя бы один из маленьких треугольников имеет вершины всех трёх цветов и что таких трёхцветных треугольников нечётное число.