29. Экзаменационная контрольная работа

29.1. Нарисовать на плоскости точки с координатами $\langle x, y\rangle$, для которых (а) $x^2 + 2x + y^2 > 3$; (б) $(x + y)(x - 1)(y + 2) < 0$.

29.2. Найти минимальное значение выражения $|x+1|+|x|+|x-1|+|x+2|$. При каких x оно достигается?

29.3. Найти все пары целых (не обязательно положительных) x, y, для которых $x + y + xy = 35$. Сколько таких пар существует? (Порядок членов в паре существен.)

29.4. Доказать, что отрезки длиной $1 + \sqrt{2}$ и $2 + 3\sqrt{2}$ несоизмеримы.

29.5. Найти наименьшее возможное значение $x + 2y$, если $xy = 1$, и числа x и y положительны. При каких x и y оно достигается?

29.6. Записать периодическую десятичную дробь $0{,}373737\ldots$ в виде несократимой обыкновенной дроби (частного двух целых чисел).

29.7. Синим цветом на числовой оси отмечены целые числа, которые при делении на 40 дают остаток 7, а красным — те, что дают остаток 17 при делении на 24. Каково наименьшее расстояние между красными и синими точками?

29.8. Найти остаток от деления записанного в шестнадцатиричной системе счисления числа 1234567 на тринадцать (чертова дюжина).

29.9. Какое максимальное число попарно не параллельных прямых можно провести на плоскости, если требуется, чтобы угол между любыми двумя был больше $3{,}5^\circ$?

29.10. Сколько есть последовательностей длины 6 из цифр $0, 1, 2$, в которых нет идущих подряд двух одинаковых цифр?

* * *

29.11. Что больше: 101^{100} или $2 \cdot 10^{200}$?

29.12. С последовательностью из десяти нулей и единиц разрешается делать две вещи: (1) менять в ней первый член; (2) менять член, стоящий после первой единицы. Доказать, что с помощью этих двух операций из любой последовательности можно получить любую.

29.13. Доказать, что для любого целого $n > 10$ квадрат можно разрезать на n квадратов.

29.14. Сколько есть последовательностей длины 6 из цифр $0, 1, 2$, в которых никакие два нуля не идут подряд?

29.15. В ряд стоят 50 стаканов, из них половина (на чётных местах) — вверх дном. За один ход разрешается перевернуть группу из любого числа подряд идущих стаканов. Доказать, что нельзя поставить все стаканы вниз дном, сделав менее 25 ходов.

29.16. Найти сумму $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{400}]$. (Квадратные скобки обозначают целую часть.)