30. Экзаменационная контрольная работа (2)

30.1. Нарисовать все такие $\langle x, y\rangle$, для которых (а) $[x] = [2y]$; (б) $[x] = 2[y]$.

30.2. Найти остаток при делении суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$ на 7.

30.3. Подряд написали все числа от 1 до 1000. Сколько всего цифр понадобилось? Сколько раз при этом встретилась цифра 7?

30.4. Известно, что $a + b + c = 7$, а $a^2 + b^2 + c^2 = 17$. (а) Найти $ab + bc + ac$. (б) Можно ли найти две различные тройки a, b, c (отличающиеся порядком различными не считаются) с такими свойствами?

30.5. Всякое ли натуральное число можно представить как разность квадратов двух целых чисел?

30.6. На какую максимальную величину квадрат числа может быть меньше самого числа?

30.7. Найти площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $x + y = -3$, $x - 2y = 6$ и $y = 7$.

30.8. Сколько существует чисел от 0 до 99999, сумма цифр которых (а) не превосходит 7; (б) не превосходит 22?

30.9. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове КАТАЛОГ, если требуется, чтобы буква К находилась между двумя бувами А (расстояние между которыми может быть любым)?

30.10. Два одинаковых стакана заполнены растворами спирта в воде на 2/3 — в одном концентрация спирта 60%, в другом 40%. Разрешается переливать любое количество жидкости из одного стакана в другой (после чего она перемешивается). Можно ли после конечного числа переливаний добиться, чтобы во втором стакане концентрация спирта стала больше, чем в первом?

30.11. Имеется 6 килограммов сахара общей ценой 40000, 4 килограмма гречки общей ценой 27000 и 5 килограммов риса общей ценой 33000. Какова наибольшая стоимость продуктов, которые можно унести в мешке, выдерживающем 12 килограмиов?

30.12. Написано 10 чисел, сумма любых трех из них больше семи. Может ли случиться так, что (а) сумма любых семи из них меньше шестнадцати? что (б) сумма любых пяти из них меньше двенадцати?

30.13. В магическом квадрате 3×3 сумма цифр в каждой строке, в каждом столбце и по любой из двух диагоналей равна 15. Доказать, что число в центральной клетке равно 5.

30.14. На доске написаны числа $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Разрешается взять любые 6 из них и увеличить на 1. Так можно делать многократно. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?

30.15. Клетки доски 8×8 раскрашены в четыре цвета, причём в любом квадрата 2×2 все четыре цвета встречаются по разу. Доказать, что все четыре угловые клетки (а) любого прямоугольника 2×8; (б) всей доски имеют различные цвета.