8. Дроби

8.1. Что больше: 10001/10002 или 100001/100002?

8.2. Найти целые положительные числа x, y, z, t, для которых

$$\frac{16}{9} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{t}}}$$

8.3. Какая обыкновенная дробь при переводе в десятичную систему даёт 0,17171717...?

8.4. Вычислить

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

8.5. Сумма нескольких различных правильных дробей с числителем 1 может быть равна 1, например $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Есть ли другие такие примеры?

8.6. Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$$

(Насколько левая и правая части меньше $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$?)

8.7. Доля двоечников в классе больше $\frac{2}{5}$, но меньше $\frac{3}{7}$, а всего в классе не больше 15 человек. Сколько в классе двоечников?

8.8. Известно, что $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$; числители и знаменатели этих дробей положительны. Доказать, что дробь $\frac{m+p}{n+q}$ находится между ними.

* * *

8.9. Доказать, что число

$$\alpha = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

не целое.

8.10. (Продолжение) Число α записали в виде несократимой дроби. Чётен ли её числитель? А знаменатель?

8.11. Любая дробь с целыми положительными числителем и знаменателем может быть представлена в виде суммы различных дробей с числителем 1 и целым положительным знаменателем.

8.12. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$$

8.13. Вычислить произведение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

8.14. Какая обыкновенная дробь при переводе в десятичную систему даёт $0{,}217171717\ldots$?

8.15. Может ли сумма 20 дробей с нечётными числителями и знаменателями быть равна 1?

8.16. Сначала бревно хотели распилить на 7 равных частей, и наметили распилы красной краской; потом собрались пилить на 13 равных частей и наметили распилы зелёной краской; наконец, его распилили на 20 равных частей. Доказать, что все части, кроме двух крайних, имеют ровно одну пометку — либо красную, либо зелёную.