# 28. Графы

**28.1.** В углах доски $3 \times 3$ стоят шахматные кони — два чёрных и два белых (рис. 28.1). (**а**) Можно ли поменять чёрных и белых коней местами (получив конфигурацию рис. 28.2)? (**б**) Можно ли поменять одного чёрного коня с одним белым (получив конфигурацию рис. 28.3)? (**в**) Если можно (в предыдущих пунктах), какое минимальное число ходов для этого необходимо?

| | | |
|---|---|---|
| Ч | | Ч |
| | | |
| Б | | Б |

Рис. 1

| | | |
|---|---|---|
| Б | | Б |
| | | |
| Ч | | Ч |

Рис. 2

| | | |
|---|---|---|
| Ч | | Б |
| | | |
| Б | | Ч |

Рис. 3

**28.2.** Выписать в ряд цифры от 1 до 9 (каждую по разу) так, чтобы любые две подряд идущие цифры давали бы двузначное число, делящееся на 7 или на 13.

**28.3.** Каждый из учеников класса подсчитал, сколько у него в классе друзей (не считая себя). Полученные числа сложили. Получилось нечётное число. Доказать, что кто-то из школьников числит среди своих друзей человека, который не считает его своим другом.

**28.4.** Доказать, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Считается, что если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

**28.5.** Нарисовано несколько точек. Некоторые из них соединены линиями. (Такую картинку называют *графом*, точки называют *вершинами*, линии — *рёбрами*.) Известно, что граф *связен*, то есть из любой вершины можно пройти в любую, идя по рёбрам. Доказать, что (число рёбер) $\geqslant$ (число вершин) $-$ 1.

**28.6.** (Продолжение) Доказать, что если число рёбер не меньше числа вершин, то граф имеет *цикл*: можно найти замкнутый путь, проходящий по рёбрам, и не проходящий два раза по одному ребру.

**28.7.** Можно ли нарисовать открытый конверт (рис. 28.4) и закрытый конверт (рис. 28.5), не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному участку линии дважды?

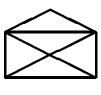

Рис. 4

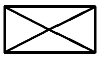

Рис. 5

**28.8.** Каждый из 20 школьников решил 2 из 20 задач, причём каждую задачу решили ровно два школьника. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и чтобы все задачи были рассказаны.

* * *

**28.9.** Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски $4 \times 4$ выкинуть угловые клетки. Можно ли её обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом по одному разу и вернуться на исходное поле?

**28.10.** Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, сделать из него каркас куба со стороной 10 см? И если нельзя, то в скольких местах придётся эту проволоку сломать?

**28.11.** Имеется группа островов, соединённых мостами. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист (**а**) не с него начал и не на нём закончил? (**б**) с него начал, но не на нём закончил? (**в**) с него начал и на нём закончил?

**28.12.** Что можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной линии дважды, а что нет?

**28.13.** В связном графе число вершин ровно на единицу больше числа рёбер. Доказать, что в нём нет циклов.

**28.14.** На доске отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: белым, синим или красным. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

**28.15.** Некоторые из 9 школьников подрались. Докажите, что найдутся либо три такие школьника, что каждый подрался с каждым, либо четыре школьника, между которыми не было драк.

**28.16.** Имеется связный граф. Доказать, что можно удалить одну из его вершин (и все входящие в неё ребра), не нарушив его связности.

---

В задачах 28.1 и 28.2 достаточно нарисовать граф, чтобы решение стало очевидным. Ответ во второй: 784913526. (Их решение есть в книжке «Как решают нестандартные задачи» А. Я. Канель-Белова и А. К. Ковальджи, М.:МЦНМО, 1997.) Чуть более сложна ситуация в задаче 28.9, где также надо нарисовать граф ходов коней, и тогда нетрудно найти искомый путь.

Задача 28.3 уже была в разделах про индукцию и про чётность (в несколько иной форме).

Обсуждая задачу 28.4, полезно переформулировать её а таком виде: в полном графе с 6 вершинами рёбра раскрашены в два цвета; доказать, что есть одноцветный треугольник. Это — простейший вариант теоремы Рамсея; следующий по сложности случай рассматривается в дополнительной задаче 6. В дополнительной задаче 7 те же соображения комбинируются (довольно искусственным образом) с соображениями чётности.

В задачах 28.5 и 28.6 ключевое понятие в решении — связная компонента. Добавление ребра уменьшает число связных компонент на 1 или даёт цикл (при неизменном числе компонент).

Продолжает тему дополнительная задача 28.13. (Вообще максимальное число «линейно независимых» циклов на единицу меньше разности между числом вершин и рёбер.)

Обсуждая задачу 28.7, можно спросить, где в случае открытого конверта может начинаться и кончаться путь.

Эта же идея развивается в задачах 28.10–28.12. В последней предлагается найти общий критерий. (Ответ: картинка должна быть связной и иметь не более двух точек нечетной степени.)