4. Тождества

4.1. Проиллюстрировать формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, сложив квадрат со стороной $a+b$ из квадрата со стороной a, квадрата со стороной b и двух прямоугольников со сторонами a и b.

4.2. Проиллюстрировать формулу $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, разрезав квадрат $a \times a$ с вырезанным углом $b \times b$ на две части, из которых можно сложить прямоугольник со сторонами $a - b$ и $a + b$. (Достаточно одного прямого разреза.)

4.3. Доказать, что $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. Как выглядит соответствующая картинка?

4.4. Если к произведению двух целых чисел, отличающихся на 2, прибавить единицу, то получится точный квадрат (например, $4 \cdot 6 + 1 = 5^2$). Почему?

Простое число — это целое число, большее 1, которое нельзя представить как произведение двух меньших целых положительных чисел.

4.5. Простое число после увеличения на 1 становится точным квадратом. Найти все такие числа.

4.6. Доказать, что число 999 991 составное (= не простое).

4.7. Найти

$$(a+b+c)(a+b-c), \quad (a+b+c)(a-b+c), \quad (a+b-c)(a-b+c)$$

(не пользуясь бумагой для промежуточных вычислений).

4.8. В выражении $(a+b-c)(d-e-f)(g-h+i)(k+l+m)$ раскрыли скобки. Сколько членов получится? Перед сколькими из них будет стоять знак минус?

* * *

4.9. В строку написаны точные квадраты: $1, 4, 9, 16, \ldots$ Под каждыми двумя числами написали их разность: $4-1=3$, $9-4=5$, $16-9=7$ и т.д. Доказать, что каждое следующая разность больше предыдущей на 2.

4.10. Написать формулу для $(a+b)^3$ и описать соответствующее ей разрезание куба со стороной $a+b$.

4.11. В старину, когда не было калькуляторов, для быстрого умножения чисел применялись таблицы «четвертей квадратов», которые указывали значения $x^2/4$ для $0, 1, 2, 3 \ldots$. Как выполнить умножение с помощью такой таблицы (и нескольких сложений и вычитаний)?

4.12. Перемножить

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$$

4.13. Доказать, что сумма кубов двух положительных целых чисел не может быть простым числом (за исключением единственного случая $1^3 + 1^3 = 2$.

4.14. Доказать, что при положительном целом n число $n^2 + n$ не может быть точным квадратом.

4.15. Четыре подряд идущих целых числа перемножили и к произведению прибавили 1. Доказать, что получится точный квадрат.

4.16. Назовём целое число хорошим, если оно представимо в виде суммы двух точных квадратов (Например, 5 хорошее, так как $5 = 2^2 + 1^2$, а 3 — нет.) Доказать, что удвоив хорошее число, мы снова получим хорошее число.

4.17. (Продолжение.) Доказать, что произведение двух хороших чисел всегда хорошее.

4.18. Доказать, что сумма

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \ldots + \\ + \frac{1}{1 \cdot n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

(в знаменателях стоят все комбинации чисел от 1 до n, в которых числа не повторяются) равна n.