15. Индукция

15.1. Доказать, что любая сторона (**а**) четырёхугольника; (**б**) пятиугольника; (**в**) произвольного n-угольника меньше суммы остальных его сторон.

15.2. Доказать, что (**а**) $n! \geqslant 3^n$ для $n = 7, 8, 9, \ldots$; (**б**) $2^n \geqslant n^2$ для $n = 4, 5, 6, \ldots$.

15.3. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно так раскрасить в два цвета, что любые две соседние (граничащие по отрезку или лучу) области будут покрашены в разные цвета.

15.4. Доказать, что двузначные числа от 00 до 99 можно записать в таком порядке, что в каждом следующем отличается от предыдущего только одна цифра и ровно на 1. Доказать аналогичное утверждение для трёхзначных чисел (000, ... , 999), четырёхзначных и т.д.

15.5. Докажите, что квадраты 4×4, 8×8, 16×16, ... с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на «уголки» из трёх клеток (квадраты 2×2 с вырезанным углом).

15.6. На сколько изменятся суммы

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

и

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

если увеличить n на 1? Доказать, что эти суммы равны друг другу при всех n.

15.7. Число $x + 1/x$ — целое. Доказать, что числа $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$, $x^4 + 1/x^4, \ldots$ также целые.

15.8. Чтобы разрезать выпуклый n-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали, нужно ровно $n - 3$ диагонали, не больше и не меньше. Почему?

15.9. Число $111\ldots111$ (3^n единиц) делится на 3^n. Почему?

* * *

15.10. Игра «Ханойские башни» имеет три вертикальных стержня. На один из них надета пирамидка из колец разного размера (меньшие на больших). (а) Как переложить кольца на другой стержень, если перекладывать можно только по одному, большее на меньшее класть нельзя, пирамидка состоит из n колец? (б) Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний. (в) Докажите, что за меньшее число перекладываний это сделать невозможно.

15.11. Последовательность $2, 3, 5, 9 \ldots$ составлена по такому правилу: если из утроенного члена этой последовательности вычесть удвоенный предыдущий, то получится следующий ($3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$, $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$ и т.д. Доказать, что все члены этой последовательности — степени двойки, увеличенные на 1.

15.12. Докажите, что квадрат размера 4×4, 8×8, 16×16, ... с вырезанной клеткой (любой) можно разрезать на «уголки» из трёх клеток (квадраты 2×2 с вырезанным углом).

15.13. В стране n городов. Каждый год открывается авиасообщение между какими-то двумя городами. Доказать, что должно пройти по крайней мере $n - 1$ лет, прежде чем из любого города можно будет попасть в любой (с пересадками).

15.14. Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Доказать, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего.

15.15. На доске написаны два числа $1, 1$. Затем между ними вписывают их сумму; получается $1, 2, 1$. Затем между каждыми двумя снова вписывают их сумму: $1, 3, 2, 3, 1$. Такое действие выполняют ещё 10 раз. Сколько чисел будет на доске? Какова будет их сумма?

15.16. Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n$ можно выбрать не более n чисел, если требуется, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось на другое. Доказать это: (а) для $n = 3$; (б) для $n = 4$; (**в**) для $n = 5$; (г) для произвольного n.

15.17. В теории относительности скорости складываются по такому правилу: $v, w \mapsto \frac{v+w}{1+vw}$. Доказать, что результат сложения нескольких скоростей не зависит от того, в каком порядке мы их складываем.

15.18. Доказать, что $2^n \geqslant n^10$ при $n \geqslant 100$.

15.19. В последовательности из 10 нулей и единиц разрешается (а) менять первый член; (б) менять член, стоящий после первой единицы. Доказать, что из любой последовательности можно получить любую.

Комментарии к задачам:

15.1: Иллюстрация индуктивного шага на специально выбранным простым примере, позволяющая обсудить со школьником индуктивный переход чётко, но без занудства (типа «утверждение A_n»).

15.2: Наводящий вопрос: во сколько раз увеличиваются левая и правая часть, если n увеличить на 1?

15.3: Индукция по числу прямых. Возможный вариант: если раскрашивать чередованием, то по двум путям раскраска одинакова, ибо цикл пересекает чётное числу границ (каждую прямую чётное число раз).

15.4: Можно менять первую цифру, между каждыми изменениями пробегая все комбинации остальных (туда и обратно).

15.5: Одно из решений такое: разрезать на четыре четверти (одну без уголка, затем вырезать еще уголок в середине так, чтобы все четыре были без уголка, и применить предположение индукции. Другое решение: вырезав один уголок, можно получить квадрат без квадратика 2×2, который можно разрезать по предположению индукции на вдвое большие уголки, каждый из которых можно разрезать на 4 уголка.

15.6: Пример того, как по индукции можно решить уже встречавшуюся задачу.

15.7: Для $n = 2$ и $n = 3$ можно воспользоваться формулами сокращённого умножения; вообще, умножая $a_n = x^n + 1/x^n$ на $x + 1/x$, получаем $a_{n+1} + a_{n-1}$. Отметим, что здесь мы используем индуктивное предположение для двух соседних n.

15.8: Можно либо выбрать какую-то диагональ, либо треугольник, примыкающий к какой-то стороне — тогда, складывая индуктивные предположения для частей, получаем требуемое. Можно было бы попытаться сказать, что есть две соседние стороны, входящие в один треугольник, и использовать индуктивное предположение только для $n - 1$, но не очевидно, почему такая пара сторон найдётся. Впрочем, утверждение задачи следует из теоремы о сумме углов, которую как раз легко доказать отрезанием треугольника.

15.9: Увеличивая число единиц в 3 раза, мы умножаем число на $10\ldots010\ldots01$, а последнее число делится на 3. (Может быть, кто-то будет говорить, что если сумма цифр делится на 27, то и число делится на 27 и т.п. — но это неверно!)

15.10: Сначала перекладываем всё без наибольшего кольца по предположению индукции, затем его, затем всё остальное ещё раз. Заметим, что наибольшее кольцо можно передвинуть только таким способм, так что этот способ оптимальный.

15.11: Пример, где индуктивный шаг сводится к простой выкладке (и не возникает недоумения, как догадались до ответа).

15.12: Более сложный вариант обязательной задачи 15.5, который легко получить тем же способом (первым из изложенных) — надо только правильно выбрать положение уголка в центре.

15.13: Каждая линия уменьшает число связных компонент не более чем на 1. (Вероятно, задачу следует повторить в разделе о графах.)

15.14: Вероятно, задачу решат многие, проводя разрезы по сторонам внутреннего многоугольника, но сформулировать, индукция по чему тут проводится, не так просто. (По числу сторон внутреннего многоугольника, не лежащих на периметре внешнего.) Но не стоит это втолковывать тем, кому это не очевидно.

15.15: Количество чисел на единицу больше степени двойки, сумма на единицу больше степени тройки. (Здесь уже надо догадаться до ответа.) Аналогичное рассуждение встретится потом в связи с треугольником Паскаля.

15.16: Эта задача уже предлагалась и оказалась трудной. Самое простое решение основано на классификации чисел по их нечетной части (наибольшему нечётному делителю). Но есть и индуктивное решение: если число $2n$ не выбрано, то можно воспользоваться предположением индукции сразу. Если же оно выбрано, то не выбрано число n; если теперь заменить $2n$ на n, то условие «ни одно выбранное число не делится на другое» не нарушится.

15.17: Трудная задача; по-видимому, единственный способ её решить состоит в проверке ассоциативности для трёх и затем в индуктивном рассуждении (с которого начинается теория групп). Для другой формулы, $a, b \mapsto a + b + ab$, можно сделать замену переменных (прибавление 1), превращающую её в обычное умножение, здесь же, похоже, замена переменных требует гиперболического тангенса.

Среди задач нет стандартных тождеств — отчасти потому, что многие из них включены в другие задания, отчасти потому, что в них непонятно, откуда берутся сами ответы. Хотелось бы, чтобы само условие задачи было мотивировано.