3. Целая часть

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение: $[x]$. (Например, $[2] = 2$, $[3,1] = 3$, $[-2] = -2$, $[-3,1] = -4$.)

Дробной частью числа x называется разность $x - [x]$. Обозначение: $\{x\}$

Таким образом, $x = [x] + \{x\}$, причём $0 \leqslant \{x\} < 1$ для любого числа x.

3.1. Нарисовать на числовой оси точки x, целая часть которых чётна.

3.2. Нарисовать на числовой оси точки x, дробная часть которых равна $1/3$.

3.3. Какие значения может принимать сумма $[x] + [-x]$?

3.4. Какие значения может принимать сумма $\{x\} + \{-x\}$?

3.5. Вася знает, что $[x] = 3$, $[y] = 4$. Достаточно ли у него данных, чтобы найти $[x + y]$?

3.6. Вася знает, что $\{x\} = 0,3$, $\{y\} = 0,4$. Достаточно ли у него данных, чтобы найти $\{x + y\}$?

3.7. Нарисовать на числовой оси те числа x, для которых $[x] = [x + 2/3]$.

* * *

3.8. Обозначая дни недели от воскресенья до субботы числами 0, 1, 2,…, 6, Вася придумал формулу

$$\text{день недели} = 7 \cdot \{\text{число}/7\}$$

которая годится, если первое число месяца было понедельником. Как надо её изменить, если первое число месяца было пятницей?

3.9. Всегда ли верны формулы $[[x + y] + z] = [x + [y + z]]$ и $\{\{x + y\} + z\} = \{x + \{y + z\}\}$?

3.10. Доказать, что $[[x/y]/z] = [x/(yz)]$ для любых положительных целых x, y, z.

3.11. Написать выражение, содержащее букву x, числа, операцию взятия целой части и арифметические операции, которое равнялось бы ближайшему к x целому числу (любому, если их два).

3.12. Написать формулы для частного и остатка при делении двух целых положительных чисел с остатком (формулы должны использовать арифметические операции и знак целой части).

3.13. Доказать, что

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + [x + \tfrac{2}{n}] + \ldots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = [nx]$$

3.14. Существует ли такое x, что $[x] + [2x] + [3x] + [4x] = 99$?

3.15. Найти сумму

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{10000}]$$

3.16. Доказать, что

$$\left[\frac{35}{23}\right] + \left[2 \cdot \frac{35}{23}\right] + \left[3 \cdot \frac{35}{23}\right] + \cdots + \left[22 \cdot \frac{35}{23}\right] = \left[\frac{23}{35}\right] + \left[2 \cdot \frac{23}{35}\right] + \left[3 \cdot \frac{23}{35}\right] + \cdots + \left[34 \cdot \frac{23}{35}\right]$$