27. Инварианты

27.1. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) приняло участие 100 человек. Сколько было сыграно матчей, прежде чем был определён победитель?

27.2. В ящик положили 3 меньших ящика. Затем в некоторые из них также положили по 3 ещё меньших ящика, и так далее. В конце концов оказлось 17 заполненных ящиков (внутри которых есть другие ящики). Сколько в этот момент пустых ящиков?

27.3. По окружности расположено 20 плюсов и 20 минусов. Доказать, что пар соседних плюсов столько же, сколько пар соседних минусов.

27.4. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать число (а) $a+b-1$; (б) $a+b+ab$. Какое число может остаться после 19 таких операций?

27.5. Любую вершину треугольника можно сдвигать по проходящей через нее прямой, параллельной противоположной стороне. Можно ли такими операциями сделать из равностороннего треугольника со стороной 1 прямоугольный треугольник с катетами, равными 1?

27.6. У числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ вычислили сумму цифр, у полученного числа также вычислили сумму цифр и так далее, пока не осталось однозначное число. Что это за число?

27.7. В ряд стоят 6 сосен и на каждой сидит чиж. Каждую минуту два чижа (на одной или разных соснах) перелетают на соседнюю сосну — один направо, другой налево. Могут ли чижи собраться на одной сосне?

27.8. (Продолжение) А если сосны стоят по кругу, и один из чижей летит по часовой стрелке, а другой — против?

27.9. (Продолжение) А если в ряд стоят 4 сосны, на которых сидят 1, 2, 3, 4 чижа, на какой сосне они смогут собраться?

27.10. В строчку написаны 10 чисел, причём сумма любых трёх соседних равна 15. Первое число равно 7. Чему может быть равно последнее число?

27.11. В мешке лежит 57 чёрных фасолин и 33 белых. Борис Михайлович вынимает из мешка наугад две фасолины. Если они оказываются одного цвета, то он заменяет их на белую фасолину, если разного — то на чёрную. Так он делает до тех пор, пока в мешке не останется только одна фасолина. Какого цвета она будет?

* * *

27.12. К любым двум числам последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ разрешается одновременно прибавить или отнять по единице. Можно ли несколькими такими операциями сделать все числа равными?

27.13. Стоят 57 стаканов вверх дном. За ход разрешается перевернуть любые (а) 5; (б) 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов поставить стаканы вниз дном?

27.14. В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно принимают окраску третьего цвета (например, при встрече серого и бурого хамелеона оба становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

27.15. На каждой клетке доски 9×9 сидит жук. В какой-то момент каждый жук переполз на одну из соседних клеток. Докажите, что после этого хотя бы одна клетка стала пустой.

27.16. На шахматной доске 9×9 стояли 9 ладей, не бьющих друг друга. В какой-то момент каждая ладья сделала ход коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

К задаче 27.3: Надо предложить сформулировать более общее утверждение: пусть догадаются, что разность числа тех и других пар равна разнице между число плюсов и числом минусов. Это более утверждение доказывается легко: обе части возрастают на 1 при добавлении плюса и убывают при добавлении минуса.