25. Арифметика остатков

25.1. Составить таблицу сложения для остатков по модулю 11. (Такая таблица состоит из 11 строк и 11 столбцов, пронумерованных от 0 до 10. В m-ой клеточке n-ой строки стоит остаток от деления суммы двух чисел, дающих остатки m и n.) Верно ли такое утверждение: в каждой строке и каждом столбце встречаются все остатки ровно по одному разу?

25.2. Решить ту же задачу для умножения. (В этом случае в таблице будет нулевая строка и нулевой столбец.)

25.3. Решить те же задачи для сложения и умножения по модулю 7 и 10.

25.4. Какие числа и по скольку раз встречаются на диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний) таблиц сложения и умножения по модулям 5, 7, 11, 17 и 19?

25.5. В последовательности $1, 2, 5, 8, 11, \ldots$ каждое следующее число на 1 больше суммы цифр квадрата предыдущего числа. Какое число стоит на 100-м месте?

25.6. Последовательность остатков от деления a, $2a$, $3a$, $\ldots$ на 12 (каждый член получается прибавлением a по модулю 12) периодична (при любом a от 0 до 11). Почему? Какие периоды тут встречаются (при различных a)?

25.7. Тот же вопрос при делении на 11. Какие периоды тут возможны?

25.8. Последовательность остатков от деления a, a^2, a^3, a^4, $\ldots$ на 11 (каждый член получается умножением на a по модулю 11) периодична при любом a от 0 до 10. Почему? Какие периоды тут возможны?

25.9. В последовательности Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ каждый член равен сумме двух предыдущих. Заменив каждое число остатком от деления его на 11, мы получим последовательность, в который каждый член равен сумме двух предыдущих по модулю 11. Доказать, что эта последовательность периодична, и найти период.

25.10. Будет ли периодична аналогичная последовательность, если 11 заменить на 13? Каков будет её период?

* * *

25.11. Доказать, что для любого n последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на n периодична (и не имеет предпериода — повторяющийся кусок стоит с самого начала)

25.12. Доказать, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся двумя нулями. Доказать, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся двумя девятками.

25.13. Запишем два произвольных числа от 0 до 10. Продолжим последовательность, беря каждый член равным сумме двух предыдущих по модулю 11. Доказать, что члены этой последовательности будут повторяться через 10.

25.14. При каких α (не обязательно целых) последовательность дробных частей $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, $\{3\alpha\}$, ... будет периодична?

Листок начинается с вычислительных задач (25.1—25.4). Цель их (помимо тренировки в вычислениях) — показать разные закономерности, к которым мы вернёмся впоследствии.

Далее идут несколько задач на периодичность. Задача 25.5 иллюстрирует общую ситуацию зацикливания в последовательности $x, f(x), f(f(x))\ldots$.

Далее в качестве f выбирается прибавление некоторого a и умножение на a. В задаче 25.6 есть две причины периодичности: во-первых, раз повторившись, остатки будут повторяться и дальше, во-вторых, $12a$ делится на 12 и потому заведомо будет периодом (хотя, возможно, и не наименьшим). Сравнивая эти два рассуждения, можно заметить, что возможные периоды — делители 12. (Тонкое место: почему любой период кратен наименьшему периоду; если школьники не видят тут проблемы, лучше не углубляться.)

В задаче 25.7 модуль прост, и потому возможны только периоды 1 и 11. (Отсюда один шаг до отсутствия делителей нуля в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, но с этим лучше подождать.)

В задачах 25.9 и 25.10 периодичность легко устаноить, заметив, что как только повторится пара соседних остатков (а возможных пар конечное число), всё начнётся заново. Для решения задачи это не нужно: в задаче 25.9 период равен 10, и это легко обнаружить, а в задаче 25.10 через 7 шагов всё повторяется, умноженное на 8, и через четыре цикла приходит в начальное состояние, так что период равен 28. (Научный подход состоит в рассмотрении формулы с $\sqrt{5}$ для чисел Фибоначчи в конечном поле — при этом важно, является ли 5 квадратичным вычетом.)

Чтобы увидеть, что нет предпериода, достаточно заметить, что последовательность можно восстанавливать справа налево (каждый член равен разности следующего и через один — с обратным знаком). Отсюда сразу видно, что по любому модулю в последовательности Фибоначчи бесконечно много нулей (поскольку на нулевом месте стоит 0).

Чтобы решить задачу 25.13, достаточно заметить, что коэффициенты в выражении n-го члена этой последовательности через два первых есть числа Фибоначчи, а их период по модулю 11 равен 10.

Практически все обязательные задачи этого листка можно решить прямым вычислением, и если школьники так и сделают, не будет ничего плохого.