10. Остатки

10.1. Отметить на числовой оси целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2. (На рисунке должны поместиться числа от -20 до 20.)

10.2. Число $100{*}{*}{*}$ (звёздочками обозначены три неизвестные цифры) делится на 547. Найти одно из таких чисел.

10.3. Книги на столе пытались связывать в пачки по 2, по 3, по 4 и по 5 книг, и каждый раз оставалась одна лишняя. Сколько книг было на столе? (Известно, что их было не больше 100.)

10.4. Квадрат целого положительного числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Что это за цифра? (Указать все возможности.)

10.5. Доказать, что для любого целого a число $10a$ даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само a.

10.6. Число a даёт остаток 5 при делении на 9, число b даёт остаток 7 при делении на 9. Можно ли по этим данным определить, какой остаток дают числа $a+b$ и ab при делении на 9?

10.7. Найти остаток от деления 6^{100} на 7.

10.8. Число a даёт остаток 6 при делении на 12. Может ли оно давать остаток 12 при делении на 20?

10.9. Доказать, что число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.

10.10. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?

10.11. Доказать, что уравнение $x^2 = 2y^2$ не имеет решений в целых числах (кроме $x = y = 0$).

* * *

10.12. Пятая степень числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Почему? Для каких ещё степеней это верно?

10.13. Найти число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, при делении на 5 — остаток 4, при делении на 6 — остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.

10.14. Квадрат целого положительного числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Указать все возможности.)

10.15. Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15?

10.16. Существуют ли целые x, y, для которых $x^2 + y^2 = 99$?

10.17. Сформулировать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11.

10.18. Верен ли такой признак делимости на 27: число делится на 27 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 27?

10.19. Целое положительное число увеличили на 1. Могла ли сумма его цифр возрасти на 8? Уменьшиться на 8? Уменьшиться на 10?

10.20. Последняя цифра точного квадрата равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра чётна.

10.21. Остаток от деления простого числа на 30 — простое число. Почему?