17. Сумма и произведение двух чисел

17.1. Сумма двух положительных чисел равна 2. Доказать, что их произведение не превосходит 1.

17.2. Сумма двух положительных чисел меньше 2. Доказать, что их произведение меньше 1.

17.3. Доказать, что $x + 1/x \geqslant 2$ для любого положительного x.

17.4. Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Почему?

17.5. Из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат. Почему?

17.6. Доказать, что $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$ для любых неотрицательных x, y.

17.7. Доказать, что $xy \leqslant (x^2+y^2)/2$ для любых x и y.

17.8. Доказать, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг к другу.

* * *

17.9. Рычажные весы имеют не совсем одинаковые плечи, и потому продавец отвешивал один килограмм сахара на левой чашке весов, а второй (тому же покупателю) — на правой. Выиграл покупатель или проиграл?

17.10. Корабль плывёт из А в Б по течению реки, а затем возвращается против течения (скорости течения и корабля постоянны). Потратит ли он на все путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?

17.11. Какую наибольшую площадь можно отгородить на берегу прямоугольным забором длины не более 100 метров? (Четвёртая сторона прямоугольника — берег; там забор не нужен.)

17.12. Доказать неравенство

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+2y}{2\sqrt{2}}$$

В этом листке собраны всевозможные вариации на тему неравенства о среднем арифметическом и геометрическом — даже с некоторым запасом.

Можно было бы заранее сформулировать и доказать это неравенство, а затем легко вывести из него разные следствия, но здесь сознательно выбран другой путь: дается много конкретных задач в надежде на то, что школьники сами заметят их родство.

В задаче 17.1 можно написать $(1-x)(1+x) = 1-x^2$. Задачу 17.2 можно вывести из неё, увеличив одно из чисел. Задача 17.3 есть следствие задачи 17.2, и на это стоит обратить внимание (вряд ли школьники заметят это сами).

В задачах 17.4 и 17.5 те же самые неравенства появляются уже с переменными границами. Наконец, в задаче 17.6 формулируется неравенство о среднем арифметическом и геометрическом. Вероятно, школьники будут решать её, возводя обе части в квадрат. В задаче 17.7 достаточно перенести всё в одну часть и увидеть $(x-y)^2/2$; стоит обратить внимание, что она отличается от задачи 17.6 лишь заменой $t \leftrightarrow \sqrt{t}$, и тем самым получается новое (возможно, более простое) решение последней.

Наконец, задача 17.8 пригодится при доказательстве неравенства о среднем арифметическом и геометрическом для произвольного количества чисел.

Задачи 17.9 и 17.10 — классические бытовые задачи на неравенства с двумя переменными. Задачи 17.11 и 17.12 — модификации неравества, в которых у переменных различные веса. (В первой из них переход от переменных x, y к переменным $x, 2y$ геометрически нагляден: симметрично отражаем забор в море.)