18. Системы счисления

18.1. Имеется 6 больших мешков с монетами, во всех монеты настоящие и весят 10 граммов, а в одном фальшивые и на один грамм легче. Как с помощью одного взвешивания (на весах, показывающих суммарный вес положенных на них монет) определить, в каком мешке фальшивые монеты?

18.2. Тот же вопрос, если фальшивые монеты могут быть в нескольких мешках.

18.3. Доказать, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных степеней двойки, причём единственным способом.

18.4. Продолжить таблицу и объяснить правило её построения:

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
...	...

(Записи в правой колонке называют сделанными в двоичной системе счисления.)

18.5. На доске написано число 0. С написанным числом разрешается выполнять два действия: (а) увеличить его вдвое; (б) увеличить его вдвое и прибавить 1. Сколькими способами можно получить на доске число 1000 (если вообще можно)?

18.6. Найти четыре тройки целых неотрицательных чисел, чтобы выполнялось такое свойство: каждое число от 0 до 80 можно представить в виде суммы четырёх чисел — по одному из каждой тройки.

18.7. На доске написано число 0. С написанным числом разрешается выполнять два действия: (а) увеличить его втрое; (б) увеличить его втрое и прибавить 1. Число назовём доступным, если его можно получить на доске таким способом. Сколько доступных чисел от 0 до 1000?

* * *

18.8. Разложить $1/3$ в двоичную периодическую дробь.

18.9. Превратить двоичную периодическую дробь $0,101101101101\ldots$ в обыкновенную.

18.10. Перевести записанное в восьмеричной системе число 2736454 в 16-ричную систему

18.11. В последовательности чисел $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (*числа Фибоначчи*) каждое число равно сумме двух предыдущих. Доказать, что любое целое положительное число можно представить в виде суммы некоторых чисел Фибоначчи, среди которых нет стоящих рядом, и что это можно сделать ровно одним способом.

18.12. Купец хочет взвешивать любое количество фунтов товара от 0 до 40 с помощью чашечных весов, имея всего четыре гири (которые можно класть на любую из чашек). Может ли так быть? (Делать несколько взвешиваний нельзя.)

18.13. Бесконечная вправо и вниз таблица заполняется по такому правилу: в каждую клеточку ставится минимальное целое неотрицательное число, которого нет ни слева, ни сверху от него. (Таким образом, первая строка — и первый столбец — содержат числа $0, 1, 2, 3, \ldots$.) Какое число стоит в 101-ой строке на 201-ом месте? Каково общее правило?

Задача 18.1 — для разминки перед задачей 18.2, в которой по существу идет речь об однозначности при разложение числа в сумму элементов некоторого множества. (Проще всего объяснить решение, сказав, что мы берём $1, 10, 100, \ldots$ монет.)

Задача 18.3 предлагает один из возможных ответов к задаче 18.3, и заодно готовит к задаче 18.4, где предлагается сформулировать правила записи чисел в двоичной системе счисления.

В задаче 18.5 двоичная система появляется в другом ракурсе: умножение на 2 (с прибавлением единицы или нет) есть дописывание единицы или нуля в конец двоичной записи, так что последовательность операций определяется однозначно.

Задачи 18.6 и 18.7 используют уже троичную систему счисления

Далее предлагается осознать стандартные арифметические алгоритмы, распространив их на непривычные системы счисления.