79. Сопряжённые числа. Деление.

Обычные числа называют *вещественными*, или *действительными*, чтобы отличить от комплексных. Действительные числа a и b называют *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = a + bi$. Обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. *Сопряжённым* к числу $z = a + bi$ называется число $\overline{z} = a - bi$ (здесь a и b — вещественные числа).

79.1. Вычислить действительную и мнимую части суммы и произведения чисел $a + bi$ и $c + di$.

79.2. Доказать, что для любого z сумма $z + \overline{z}$ и произведение $z\overline{z}$ действительны (имеют нулевую мнимую часть).

79.3. Доказать, что $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ и что $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

79.4. Вычислить $(1+i)/(1-i)$ и $(8+i)/(1+2i)$. (Можно либо решать систему уравнений, либо домножить числитель и знаменатель на сопряжённое число.)

79.5. Найти общую формулу для частного $(a + bi)/(c + di)$.

79.6. Для каких комплексных z найдётся такое w, что $zw = 1$?

79.7. Доказать, что если $zw = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

79.8. Доказать, что если $z^2 = w^2$, то $z = w$ или $z = -w$.

79.9. Найти все комплексные числа, для которых $z^2 = 2i$.

79.10. Доказать, что $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

* * *

79.11. Доказать тождество $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

79.12. Некоторые целые числа (например, $2 = 1^2+1^2$ и $13 = 2^2+3^2$) представимы в виде суммы двух точных квадратов, некоторые (например, 7) — нет. Доказать, что если два числа представимы в таком виде, то и их произведение обладает этим свойством.

79.13. (Продолжение) Доказать, что число $2a$ представимо в таком виде тогда и только тогда, когда представимо число a.

79.14. Доказать, что если сумма и произведение двух комплексных чисел вещественны, то эти числа либо оба вещественны, либо сопряжены.

79.15. Найти все комплексные числа z, для которых $z^2 + z + 1 = 0$.

79.16. Найти все комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$.

Здесь мы убеждаемся, что комплексные числа можно делить (заметим в скобках, что явного определения частного не даётся — ни один школьник этого не заметил, кстати).

Тождество задачи 79.11 есть $(z\overline{z})(w\overline{w}) = (zw)(\overline{zw})$. В задаче 79.13 используется тождество $(x^2 + y^2)/2 = ((x + y)/2)^2 + ((x - y)/2)^2$ и простые соображения о чётности. Задача 79.16 была в предыдущем листке; здесь она появляется как продолжение задачи 79.15.