80. Комплексная плоскость

Комплексное число $z = a + bi$ рассматривают как точку на плоскости с координатами (a, b). Ось абсцисс называют *действительной* осью; на ней лежат действительные числа. Ось ординат называют *мнимой* осью; на ней лежат *чисто мнимые* комплексные числа.

80.1. Какое преобразование плоскости переводит z в $2z$?

80.2. (Продолжение) ...переводит z в $z + 1$?

80.3. (Продолжение) ...переводит z в $\overline{z}$?

80.4. (Продолжение) ...переводит z в $-z$?

80.5. (Продолжение) ...переводит z в $-\overline{z}$?

80.6. (Продолжение) ...переводит z в iz?

80.7. Где находятся точки z, для которых $z + \overline{z} = 1$?

80.8. Где находятся точки z, для которых $z\overline{z} = 1$?

Модулем комплексного числа z называется длина отрезка $0z$ (расстояние от начала координат до z); *аргументом* этого числа называется угол, образуемый отрезком $0z$ с осью абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки. (Обозначения: $|z|$ для модуля, $\arg z$ для аргумента.)

80.9. Доказать, что $|z|^2 = z\overline{z}$.

80.10. Написать формулу для расстояния между числами z и w.

80.11. Где находятся числа z, для которых $|z| = 1$? ...для которых $|z - 1| = 1$? ...для которых $|z| = |z + 1|$?

80.12. Доказать, что $|zw| = |z| \cdot |w|$ для любых комплексных чисел z и w.

80.13. Найти действительную и мнимую части числа z, если $|z| = 2$ и $\arg z = 60°$. Найти действительную и мнимую части чисел z^2 и z^3.

80.14. Написать формулы для действительной и мнимой части числа с модулем r и аргументом α.

* * *

80.15. Для данного z найти w, при котором точки 0, z, iz и w лежат в вершинах квадрата.

80.16. Доказать, что точки 0, $1/z$ и $\overline{z}$ лежат на одной прямой.

80.17. Доказать, что точки z, для которых $z + \overline{z} = z\overline{z}$, лежат на окружности, и найти её центр и радиус.

80.18. Доказать, что точки, для которых число $z/(z - 1)$ является чисто мнимым, лежат на окружности, и найти её центр и радиус.

80.19. Известно, что $|z - 3| \leqslant 2$, $|z + 4i| \leqslant 3$. Найти все такие z.

80.20. Найти комплексное число α, при котором преобразование $z \mapsto \alpha z$ есть поворот на $45°$. Чему равен квадрат этого числа?

80.21. Доказать, что преобразование $z \mapsto (1 + i)z$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

80.22. Как найти четвёртую вершину параллелограмма на комплексной плоскости, если три его вершины равны u, v и w? (Указать все возможности.)

80.23. Где находится точка пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки u, v и w комплексной плоскости?

80.24. Записать формулу для преобразования комплексной плоскости, являющегося симметрией относительно прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Здесь вводится тригонометрическая форма числа и правило умножения модулей; сложение аргументов объясняется в следующем листке.