81. Умножение и повороты

81.1. Доказать, что для любого комплексного a преобразование $z \mapsto az$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

81.2. Что можно сказать про это преобразование, если число a действительно? ...если $|a| = 1$?

81.3. При каком a это преобразование будет поворотом на 30° вокруг начала координат?

81.4. Доказать, что преобразование $z \mapsto az$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $|a|$ и поворота на угол $\arg a$.

81.5. Доказать, что преобразование поворота на угла α задаётся формулой $z \mapsto z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

81.6. Куда переходит точка $z = 1$ при повороте на угол α, а затем на угол β? Получить формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$.

81.7. Доказать, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

81.8. Как найти модуль и аргумент частного z/w, зная модули и аргументы комплексных числе x и w?

81.9. Написать формулы для $\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$.

81.10. Получить формулы для $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ с помощью комплексных чисел, возведя $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ в куб.

81.11. Доказать, что комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$, являются вершинами правильного треугольника.

81.12. Доказать, что для любого целого $n > 2$ и для любого комплексного a корни уравнения $z^n = a$ являются вершинами правильного n-угольника.

* * *

81.13. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом на 45° вокруг точки $1 = 1 + 0i$?

81.14. Числа 0 и z являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина?

81.15. Числа 0 и z являются вершинами квадрата. Где могут находиться две другие его вершины?

81.16. Найти все корни уравнения $z^5 = 1$ (в ответе могут остаться квадратные корни, но не должно быть синусов и косинусов).

81.17. Доказать, что сумма всех n корней уравнения $z^n = 1$ равна 0.

81.18. Найти произведение всех n корней уравнения $z^n = 1$.

81.19. Доказать, что все корни уравнения $z^n = 1$ являются степенями некоторого из них. (Корень с таким свойством называется *первообразным* корнем.)

81.20. Сколько существует первообразных корней степени 12 из единицы?

81.21. Тот же вопрос для корней степени 1001.

81.22. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом? переносом? осевой симметрией?

81.23. При каких a и b преобразование $z \mapsto a\bar{z} + b$ является осевой симметрией?

Здесь предлагается доказать правило сложения аргументов с помощью уже известной теоремы Шаля: умножение на комплексное число (с модулем 1) есть поворот, поскольку оно имеет ровно одну неподвижную точку. После этого можно доказать формулы для синуса и косинуса суммы и разности (а не использовать их при выводе правила сложения аргументов).

В задачах 81.17 и 81.18 можно обойтись без теоремы Виета, вычислив сумму и произведение явно.

Ответ к задаче 81.21: $720 = (7-1)(11-1)(13-1)$, так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. В задаче 81.23 полезно заметить, что преобразование меняет ориентацию, и потому осевую симметрию можно отличить от скользящей симметрии, выяснив, будет ли квадрат преобразования тождественным.