82. Комплексные числа и геометрия

82.1. Точки x, y, z комплексной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

82.2. Доказать, что множество всех z, для которых $(z-1)/(z-2)$ — чисто мнимое, есть окружность, диаметром которой является отрезок с концами 1 и 2

82.3. Доказать, что треугольник с вершинами $0, 1, z$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1, 1/z$.

82.4. Доказать, что треугольник с вершинами $0, z, w$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1/z, 1/w$.

82.5. Доказать, что точки $z, w, 1/\overline{z}, 1/\overline{w}$ лежат на одной окружности.

82.6. Доказать, что точка $1/z$ пробегает окружность, когда z движется по прямой $\operatorname{Re} z = 1$.

82.7. Доказать, что при отображении $z \mapsto 1/z$ окружности, проходящие через начало координат, переходят в прямые.

* * *

82.8. Точки x, y, z, w комплексной плоскости лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

82.9. Четырёхугольник имеет вершины A, B, C, D, рассматриваемые как точки комплексной плоскости. Через AB обозначим комплексное число, равное разности $B - A$. Доказать, что $AB \cdot CD - BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

82.10. (Продолжение) Вывести отсюда, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон.

82.11. (Продолжение) Когда это неравенство обращается в равенство?

82.12. Определим две операции на комплексных числах: $(z, w) = \operatorname{Re} z\overline{w}$ и $[z, w] = \operatorname{Im} z\overline{w}$. Как изменятся (z, w) и $[z, w]$, если переставить z и w местами?

82.13. (Продолжение) Доказать, что (z, w) равняется произведению длин отрезков $0z$ и $0w$ на косинус угла между ними.

82.14. (Продолжение) Доказать, что площадь треугольника $0zw$ равна $(1/2)|[z, w]|$.

82.15. (Продолжение) Сформулировать простое правило, позволяющее определить, когда $[z, w]$ положительно, отрицательно и равно нулю. (Указание: ответ содержит слова «по часовой стрелке».)

В задаче 82.2 множество содержит точки, из которых отрезок $[1, 2]$ виден под углом $90°$. В задачах 82.3 и 82.4 треугольники переводятся друг в друга умножением на $1/z$ и $1/(zw)$. В задаче 82.8 имеется в виду двойное отношение. В задаче 82.11 неравенство обращается в равенство для вписанного четырёхугольника (теорема Птолемея); это легко увидеть с помощью двойного отношения. В задачах 82.12–82.15 рассматриваются операции скалярного и векторного произведения в комплексной записи.