83. Окружности и преобразования

Инверсией относительно окружности с центром O и радиусом r называется преобразование, при котором точка X переходит в точку X', лежащую на луче OX, для которой $OX \cdot OX' = r^2$.

83.1. Какие точки остаются на месте при инверсии? Какие точки никуда не переходят? В какие точки никакая точка не переходит? Что будет, если применить преобразование инверсии дважды?

83.2. Куда переходит точка z при инверсии с центром 0 и радиусом r? (Ответ включает операцию сопряжения комплексных чисел.)

83.3. Доказать, что при инверсии с центром в точке O прямые, не проходящие через O, переходят в окружности, проходящие через O, и наоборот. (Эта задача по существу уже была.)

83.4. Доказать, что при инверсии с центром в O окружности, не проходящие через O, превращаются в окружности, не проходящие через O.

83.5. Доказать, что при инверсии любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

83.6. Доказать, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

83.7. Доказать, что при преобразовании $z \mapsto (z-a)/(z-b)$ образ любой прямой или окружности (множество, составленное из образов всех её точек) есть прямая или окружность.

83.8. (Продолжение) Доказать, что при этом преобразовании прообраз любой прямой или окружности (множество точек, которые попадают на эту прямую или окружность после преобразования) есть прямая или окружность.

83.9. Используя задачу 83.8, доказать, что при любых комплексных a и b множество тех z, для которых $(z-a)/(z-b)$ — чисто мнимое, есть окружность.

83.10. На плоскости даны две точки A и B. Доказать, что точки, лежащие втрое дальше от A, чем от B, образуют окружность. Как доказать это с использованием задачи 8?

* * *

83.11. Найти *дробно-линейное преобразование*, то есть преобразование вида $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где a, b, c, d — комплексные числа, при котором полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ переходит в круг $|z| < 1$.

83.12. Решить задачу 83.6, используя сформулированные выше условия, при которых четыре комплексных числа лежат на одной окружности.

83.13. Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование есть композиция поворотов, сдвигов и преобразований вида $z \mapsto 1/z$.

83.14. Указать дробно-линейное преобразование, при котором единичный круг $|z| < 1$ остаётся на месте, но центр его смещается.

83.15. Доказать, что при инверсии касающиеся окружности переходят в касающиеся, и вообще угол, под которым пересекаются две окружности или прямые, не меняется.

В задаче 83.7 можно разложить преобразование в композицию ($(z-a)/(z-b) = 1+(b-a)/(z-b)$; см. задачу 83.13). В задаче 83.8 можно заметить, что обратное преобразование имеет такой же вид. Задача 83.15 (сохранение углов при конформных преобразованиях) может быть решена с помощью такого трюка. Касающиеся прямые или окружности переходят в касающиеся (подсчёт числа точек пересечения), поэтому мы можем выбрать удобные окружности — а если окружность проходит через две инверсные точки, то она переходит в себя!