84. Комплексные числа: разное

84.1. Доказать, что $|z + w| \leqslant |z| + |w|$. При каких условиях это неравенство обращается в равенство?

84.2. Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел, то есть равенство $(uv)w = u(vw)$.

84.3. Разложить на множители многочлены $z^2 + 1$ и $z^2 + 2z + 2$. (Многочлены-множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

84.4. Какая кривая является образом прямой $\operatorname{Re} z = 1$ при отображении $z \mapsto iz^2$?

84.5. Записать $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$ как многочлены от $\cos x$. Нарисовать примерные графики этих многочленов на отрезке от -1 до 1.

84.6. Доказать, что при любом целом положительном n можно записать $\cos nx$ как многочлен от $\cos x$.

84.7. Найти формулу для сумм $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ и $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

84.8. Доказать, что при любом x сумма $\cos x + \cos(x + 120°) + \cos(x + 240°)$ равна 0.

84.9. (Продолжение) Тот же вопрос для суммы $\cos x + \cos(x + 72°) + \cos(x + 144°) + \cos(x - 72°) + \cos(x - 144°)$.

84.10. Доказать, что если точки a, b, c являются вершинами равностороннего треугольника, то $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

84.11. (Продолжение) Верно ли обратное?

84.12. Какие значения может принимать аргумент числа z, если $|z - 2i| \leqslant 1$?

84.13. Доказать, что уравнение $z\bar{z} + az + \overline{az} + c = 0$, где a — комплексное число, а c — действительное, задаёт пустое множество (т.е. не имеет решений), точку или окружность. Как определить по a и c, что именно?

84.14. Дан правильный многоугольник и точка. Доказать, что сумма квадратов расстояний от заданной точки до вершин многоугольника определяется расстоянием от заданной точки до центра многоугольника (центра описанной около него окружности).

84.15. Найти все числа z, для которых $z^{57} = z^{111} = 1$.

84.16. Доказать, что если $1/z_1 + 1/z_2 + \ldots + 1/z_n = 0$ для комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$, то найдутся такие положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$.

84.17. На сторонах треугольника с вершинами в точках u, v, w построены равносторонние треугольники. Найти формулы для их центров (в виде выражений, содержащих комплексные числа u, v, w). Доказать, что эти центры образуют равносторонний треугольник.

84.18. Доказать, что всякое преобразование подобия (преобразование, меняющее все расстояния в одно и то же число раз, называемое *коэффициентом подобия*), сохраняющее ориентацию, имеет вид $z \mapsto az + b$.

84.19. Доказать, что всякое преобразование подобия, меняющее ориентацию, имеет вид $z \mapsto a\bar{z} + b$.

84.20. Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, отличным от 1, имеет ровно одну неподвижную точку.

84.21. Доказать, что число $(3/5) + (4/5)i$ не является корнем n-ой степени из 1 ни при каком целом положительном n.

84.22. Доказать, что острый угол прямоугольного треугольника со сторонами $3, 4, 5$ измеряется иррациональным числом градусов.

84.23. *Гауссовым числом* называется комплексное число вида $a + bi$, где a и b — целые числа. Говорят, что одно гауссово число делится на другое, если их частное — также гауссово число. Нарисуйте все кратные чисел 1, i, $1 + i$, $3 + 4i$.

84.24. (Продолжение) Гауссово число называется *простым*, если оно не разлагается в произведение двух множителей, отличных от ± 1 и $\pm i$ (эта оговорка необходима, иначе простых чисел бы не было). Найти все простые гауссовы числа $a + bi$ с $|a|, |b| \leqslant 10$.

84.25. Комплексное число z лежит на единичной окружности: $|z| = 1$. Доказать, что можно найти такое целое положительное n, что $|z^n - 1| < 0{,}0001$.

Здесь собраны разные задачи о комплексных числах (для тех, кто решил предыдущие листки раньше других).

В задаче 84.2 надо доказать (многократно использованную до этого!) ассоциативность умножения; кстати, здесь нельзя сослаться на тригонометрическую форму записи, так как при её получении ассоциативность используется. В задаче 84.4 образ является параболой. В задачах 84.5 и 84.6 фигурируют многочлены Чебышёва. Суммы в задаче 84.7 предполагалось считать как вещественную и мнимую части геометрической прогрессии, но можно и домножить их на $\sin(x/2)$. В задаче 84.11 можно сослаться на то, что квадратное уравнение (например, относительно c) имеет не более двух корней, а два корня уже есть (возможные положения третьей вершины, см. задачу 84.10). В задачах 84.18 и 84.19 можно воспользоваться тем, что преобразование определяется образами двух точек (если известно, сохраняет ли оно ориентацию). В задаче 84.20, по-видимому, не обойтись без явного решения системы линейных уравнений (для случая преобразований, меняющих ориентацию). Для решения задачи 84.21 достаточно заметить, что вещественная и мнимая части числа $(3 + 4i)^n$ дают остатки 3 и 4 при делении на 5 (для любого n). В задаче 84.25 мы в который раз возвращаемся к плотной обмотке окружности.