85. Контрольная работа (3 февраля 1998)

85.1. Нарисовать точки (комплексные числа) z, для которых $\operatorname{Re}(z-1) = \operatorname{Im}(z-2)$

85.2. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника имеет концы в точках $1+i$ и $4+2i$. Указать (две) точки, в которых может находиться вершина прямого угла этого треугольника.

85.3. Нарисовать точки, для которых $\arg \frac{z}{z+1} = 60^\circ$

85.4. Нарисовать точки z, для которых $|(1+i)z-3| \leqslant 1$.

85.5. Решить уравнение (x, y — действительные числа): $(x+iy)^5 = (x-iy)$.

85.6. Известно, что $z + 1/z = 2\cos 1^\circ$. Найти $z^{60} + (1/z^{60})$.

85.7. Найти максимум величины $|z|$, если $|(z+1)/z| = a$ (здесь a — фиксированное положительное действительное число).

* * *

Вариант для переписывания

85.8. Нарисовать комплексные числа, у которых $\operatorname{Re} iz = \operatorname{Im}(1+i)z$.

85.9. Две вершины правильного треугольника находятся в точках 2 и i. Указать (две) точки, где может находиться его третья вершина.

85.10. Нарисовать точки, у которых $\arg(\overline{z}(z+1)) = 120^\circ$.

85.11. Где находятся точки z, для которых расстояние между точками $3z$ и $1+iz$ не больше 2?

85.12. Где находятся точки z, для которых $|z-i| = |3-z|$?

85.13. Точка z обходит окружность радиуса 1 с центром в нуле, делая оборот против часовой стрелки. Найти траекторию точек $2z$, iz, $\overline{z}$, z^2, $1/z^2$, $1/(z+2)$, $z+1/z$.

85.14. Точка z движется по окружности с центром в $5i$ и радиуса 3. Найти центр и радиус окружности, по которой движется точка $1/z$.

85.15. Вставить пропущенное выражение в утверждение: «различные точки u, v и w являются вершинами прямоугольного треугольника с острым углом u тогда и только тогда, когда ... вещественно».

85.16. Даны три ненулевых комплексных числа. Может ли так случиться, что отношение любых двух из них будет иметь отрицательную действительную часть?

85.17. Тот же вопрос для четырёх чисел.

Ещё один вариант для переписывания

85.18. Нарисовать комплексные числа z, для которых $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}(iz)$.

85.19. Нарисовать точки z, у которых $0 < \arg((z-1)/(z+1)) < 90^\circ$.

85.20. Точка z движется по единичной окружности с центром в нуле против часовой стрелки. Описать движение точек z^3, $z^2 + 1/z^2$, $2/(1+z)$, $3/(2+z)$, $\sqrt{z}$.

85.21. Указать все значения z, при которых точки $1, z, z^2$ являются тремя (различными) вершинами квадрата. (Будьте внимательны — имеется много возможностей!)

85.22. Известно, что числа $z_1, \ldots, z_{10000}$ удовлетворяют неравенству $|z-2| < 1$. Доказать, что частное каких-либо двух их них (а) имеет модуль между 0,99 и 1,01; (б) имеет аргумент между -1° и 1°; (в) имеет одновременно модуль между 0,9 и 1,1 и аргумент между -10° и 10°.