86. Множества и операции

Множества состоят из *элементов*. Обозначения: $x \in A$ читается «x есть элемент множества A»; через $\{a, b, \ldots, c\}$ обозначается множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots, c$. (Порядок не учитывается, каждый элемент считается по одному разу, так что $\{5,7,11\} = \{7,11,5\} = \{11,11,5,7,5\}$.) *Пустое* множество не содержит элементов и обозначается $\varnothing$.

Два множества *равны*, если содержат одни и те же элементы (все элементы первого являются элементами второго и наоборот). Множество A называют *подмножеством* множества B, если все элементы A являются элементами B (запись: $A \subset B$).

86.1. Сколько различных подмножеств имеет множество из 5 элементов?

86.2. Закончить фразу: «множество A не является подмножеством множества B, если существует...».

86.3. Указать все пары «подмножество — множество» среди следующих семи множеств: целые числа, делящиеся на 2, на 3, на 6, на 4, на 9, на 12, на 18. Сколько таких пар?

Пусть даны два множества A и B. Их *пересечение* $A \cap B$ состоит из элементов, принадлежащих обоим множествам; *объединение* $A \cup B$ — из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств. *Разность* $A \setminus B$ состоит из элементов A, не принадлежащих B; *симметрическая разность* $A \triangle B$ — из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B.

86.4. Заполнить таблицу

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in A \setminus B$	$x \in A \triangle B$
нет	нет				
нет	да				
да	нет				
да	да				

86.5. Дополнить фразу: «множество решений уравнения $f^2(x) + g^2(x) = 0$ является ... множеств решений уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$» (значения $f(x)$ и $g(x)$ — действительные числа).

86.6. Какие два множества задачи 3 в пересечении дают третье множество из той же задачи? Сколько решений имеет эта задача? (Все три множества должны быть разными.)

86.7. Записать выражение для $A \triangle B$, использующее операции $\cup, \cap$ и $\setminus$.

86.8. Какие из равенств (a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; (b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; (c) $A \cup (B \setminus A) = B$; (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (e) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ верны (для всех A, B и C)?

86.9. Упростить выражение $A \triangle (B \triangle A)$.

86.10. Доказать, что $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ для любых трёх множеств A, B и C

86.11. Доказать, что $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ для любых трёх множеств A, B и C.

* * *

86.12. Дополнить фразу: «множество решений уравнения ... есть объединение множеств решений уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$».

86.13. Написать выражение для множества, состоящего из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из трёх множеств A, B и C.

86.14. Доказать, что $A_1 \triangle A_7 \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3) \cup \ldots \cup (A_6 \triangle A_7)$

86.15. Доказать, что значение выражения $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n$ не зависит от расстановки в нём скобок.

86.16. Какие из четырёх операций $\cup, \cap, \setminus, \triangle$ можно выразить через три оставшиеся?

86.17. (Продолжение) Указать все случаи, в которых одну из четырёх указанных операций можно выразить через две других операции из того же списка. Сколько таких случаев?

86.18. Сколько различных выражений можно составить из букв A и B с помощью операций $\cap, \cup, \setminus$? Тот же вопрос для случая трёх букв A, B, C. Тот же вопрос для n букв. (Два выражения считаются одинаковыми, если они обозначают одно и то же множество при всех значениях переменных. Например, выражения $A \cap (B \setminus C)$ и $(A \cap B) \setminus C$ одинаковы.)

86.19. Множество из 3 элементов имеет 8 подмножеств. Изобразить их в виде 8 точек плоскости с соблюдением такого правила: для любых двух подмножеств A и B точки A, B, $A \cap B$ и $A \cup B$ являются вершинами параллелограмма (возможно, вырождающегося в отрезок или точку). Нарисовать аналогичную картинку для 4 элементов вместо 3.

86.20. Какое максимальное число подмножеств 4-элементного множества можно выбрать, если требуется, чтобы ни одно из выбранных множеств не было бы подмножеством другого?

86.21. (Продолжение) Тот же вопрос для 100-элементного множества.

86.22. Какие из равенств задачи 86.8 верны хотя бы в одну сторону (левая часть есть подмножество правой или наоборот)?

Здесь впервые явно появляются теоретико-множественные обозначения. Вероятно, не следует требовать формальных доказательств равенств; в большинстве случаев вполне достаточно, если школьники умеют отличать верные равенства от неверных с помощью картинок.

Задача 86.14: если элемент x по-разному себя ведёт в отношении A_1 и A_7, то для каких-то двух соседей есть такое же различие. В задаче 86.15 полезно заметить, что симметрическая разность соответствует сумме по модулю 2. Задача 86.17: $\cup$ и $\cap$ монотонны, и потому через них не выражается $\triangle$ и $\setminus$; всё, что получается с помощью $\cap$ и $\setminus$, содержится в одном из операндов, и операции $\cup$ и $\triangle$ выразить нельзя. Ответ в задаче 86.18: 2^{2^n-1}. К задаче 86.19 ответом может служить проекция куба (или 4-мерного куба). В задаче 86.20 можно разобрать несколько возможных случаев без особого труда.

Задача 86.21 — трудная; максимальное число подмножеств получается, если рассмотреть все подмножества из 50 элементов. Простое решение использует теорию вероятностей; вот оно. Пусть некоторые подмножества выделены и никакие два выделенных подмножества не сравнимы по включению. Если мы в случайном порядке прибавляем элементы к пустому множеству, пока не получим всё множество, то вероятность встретить на этом пути данное k-элементное множество равна $1/C_{100}^k$. Два выделенных множества на одном пути невозможны, поэтому математическое ожидание числа выделенных множеств на пути не превосходит 1 — но оно равно сумме вероятностей встретить каждое из выделенных множеств. Идея элементарного решения: рассмотрим наименьшее k, при котором существует выделенное k-элементное множество. Удалим все выделенные k-элементные множества, заменив их на все $(k+1)$-элементные множества, их содержащие.