87. Число элементов

Число элементов в множестве A (если оно конечно) обозначают $|A|$.

87.1. Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 2? Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 3? Сколько чисел от 1 до 1000 делится или на 2, или на 3?

87.2. Доказать, что (a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ для любых конечных множеств A и B; (b) $\max(m, n) = m + n - \min(m, n)$ для любых двух чисел m и n; (c) $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$ для любых двух фигур A и B на плоскости (здесь $S(F)$ обозначает площадь фигуры F); (d) $\text{НОК}(m, n) = mn/\text{НОД}(m, n)$ для любых двух целых положительных чисел m и n (здесь НОК — наименьшее общее кратное, НОД — наибольший общий делитель).

87.3. Выбрали четыре множества, каждое из которых содержит 40 элементов, а их объединение содержит не более 100 элементов. Доказать, что пересечение каких-то двух из них имеет не менее 10 элементов. Как сформулировать аналогичную задачу для площадей?

87.4. Объединение 10 фигур имеет площадь S. Доказать, что можно выбрать из них 7 так, чтобы их объединение имело площадь не менее $(7/10)S$. Как сформулировать аналогичную задачу для числа элементов?

87.5. Доказать «формулу включений и исключений» для трёх множеств A, B, C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

* * *

87.6. Сформулировать и доказать аналогичные формулы для большего числа множеств.

87.7. Сформулировать и доказать аналогичные формулы для максимума трёх чисел, для площади объединения трёх фигур и для наибольшего кратного трех чисел.

87.8. Формулу включений и исключений можно доказать с помощью тождества $(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc$. Как? (То же самое рассуждение годится и для большего числа множеств.)

Задача 87.2: можно обратить внимание на то, что пункт (b) следует из (a), если рассмотреть множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\{1, 2, \ldots, m\}$; в пункте (d) можно использовать пункт (b), считая кратности простых множителей.

В задаче 87.8 (несколько загадочной) предполагалось изобразить множество последовательностью нулей и единиц, тогда пересечение есть поэлементное произведение, число элементов — сумма членов последовательности и т. п.