## 88. Вариации на тему Бернулли

**88.1.** Указать натуральное $n$, для которого $1{,}01^n \geqslant 10$. (Сколько лет надо ждать, чтобы вклад в банке удесятерился, если платят 1% годовых?)

**88.2.** Каждый год 1% радиоактивного вещества (оставшегося к началу года) распадается. Доказать, что через 30 лет останется более 70% вещества.

**88.3.** Указать натуральное $n$, при котором $0{,}99^n \leqslant 1/10$.

**88.4.** Указать натуральное $n$, при котором $\sqrt[n]{10} \leqslant 1{,}01$.

**88.5.** Указать натуральное $n$, при котором $\sqrt[n]{0{,}1} \geqslant 0{,}99$.

**88.6.** Доказать, что при неотрицательном целом $n$ и при $h \geqslant 0$ выполнено неравенство $(1+h)^n \geqslant 1+nh$. Какие из предыдущих задач можно решить, сославшись на это неравенство?

**88.7.** Доказать, что при целом неотрицательном $n$ и при $0 \leqslant h \leqslant 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \geqslant 1-nh$.

**88.8.** Доказать, что $1{,}01^{2n} \geqslant n^2/10^4$.

**88.9.** Доказать, что при некотором целом $n > 0$ число $1{,}01^n$ будет больше числа $1000n$.

**88.10.** При каких натуральных $n$ выполнено неравенство $2^n > n$?

**88.11.** Тот же вопрос для неравенства $2^n > n^2$.

* * *

**88.12.** Каждый год 1% радиоактивного вещества (от оставшегося к началу года) распадается. Доказать, что через 30 лет останется менее 80% вещества.

**88.13.** Доказать, что при целом неотрицательном $n$ и при $0 \leqslant h \leqslant 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \leqslant 1-nh+n^2h^2$.

**88.14.** Известно, что $a_1, \ldots, a_n > 0$ и что $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1/10$. Доказать, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant 9/10.$$

**88.15.** (Продолжение) Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 11/10.$$

**88.16.** (Продолжение) Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leqslant 10/9.$$

**88.17.** Известно, что $a_1, a_2, \ldots, a_{100} > 0$ и что

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{100}) \leqslant 100.$$

Доказать, что найдётся такое $i$, что $a_i \leqslant 1/i$.

**88.18.** Доказать, что

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100} < \frac{1}{10}$$

**88.19.** Все числа бесконечной последовательности $a_0, a_1, a_2\ldots$ положительны и не превосходят 100. Доказать, что найдётся такое $k$, что $a_{k+1}/a_k < 1{,}001$.

**88.20.** Доказать, что при некотором целом $n > 0$ выполнено неравенство $n^{100}/2^n < 1/1000$.

---

Первая группа задач посвящена неравенству Бернулли $(1+h)^n \geqslant 1+nh$. При $h \geqslant 0$ его легко доказать, раскрыв скобки (или по индукции: каждый раз прибавляется определённый процент от текущей суммы, что больше того же процента от начальной суммы). Это неравенство предлагается доказать для различных примеров, а затем в общем виде.

Неравенство Бернулли верно и при $-1 \leqslant h \leqslant 0$, когда оно может быть переписано так: $(1-h)^n \geqslant 1-nh$ при $0 \leqslant h \leqslant 1$. И в этом случае оно очевидно (убавляется процент от текущей суммы, что меньше того же процента от исходной суммы). (Это рассуждение особенно понятно в примере с радиоактивным веществом.) В тех же терминах можно объяснить и верхнюю оценку $(1-h)^n \leqslant 1-nh+n^2h^2$: мы уже знаем, что текущая сумма не меньше $1-nh$, так что убавится не меньше $nh(1-nh)$.

Если мы хотим доказать, что $a^n$ при $a > 1$ растёт быстрее любого полинома, то неравенства Бернулли недостаточно. Обойти эту трудность можно по-разному. Можно заметить, что $(1+h)^n > \varepsilon n^2$ (второй член бинома Ньютона или, проще, $(1+h)^{2n} = ((1+h)^n)^2 \geqslant (nh)^2$); теперь видно, что $a^n$ растёт быстрее $n$. Далее, возводя полученное неравенство в степень $k$, получаем, что показательная функция растёт быстрее $n^k$ при любом $k$. Другой способ убедиться, что $n^k/a^n$ стремится к 0, состоит в том, чтобы посмотреть на отношение соседних членов, которое стремится к $1/a$, а потом сравнить с геометрической прогрессией. Впрочем, в задаче 88.20, где об этом идёт речь, легко указать конкретное значение $n$.

Аналог неравенства Бернулли для различных добавок: $(1+a_1)\ldots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+\ldots+a_n$ (все $a_i$ положительны) и $(1-a_1)\ldots(1-a_n) \geqslant 1-a_1-\ldots-a_n$ (все $a_i$ от 0 до 1) Это предлагается доказать для конкретного случая (сумма добавок равна $1/10$). В следующей задаче предлагается верхняя оценка, которую можно доказывать по-разному: можно заметить, что $1/(1-x) \geqslant 1+x$ и воспользоваться задачей 88.14; можно доказывать по индукции, говоря, что раз текущее произведение меньше $10/9$, то и добавка к нему будет не больше $(10/9)a_n$, и потому сумма добавок не больше $(10/9)\cdot(1/10) = 1/9$. Наконец, можно сказать, что $(1+a_1)\ldots(1+a_n) \leqslant 1+(a_1+\ldots+a_n)+(a_1+\ldots+a_n)^2+\ldots = 1/(1-(a_1+\ldots+a_n))$.

(Эти рассуждения пригодятся для доказательства того, что сумма обратных величин к различным простым числам может быть сколь угодно большой.)

В задаче 88.18 достаточно заметить, что

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 99}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 100} = \frac{1}{100}$$

и что левая часть больше квадрата интересущей нас дроби.