89. Неравенства, оценки, суммы

89.1. Сколько знаков в десятичной записи числа 2^{40}?

89.2. При каком n значение дроби $10^n/n!$ будет наибольшим?

89.3. Указать целое положительное n, при котором $2^n/n! < 1/1000$.

89.4. Не пользуясь калькулятором, найти 3 знака после запятой в числах $\sqrt{1{,}001}$ и $\sqrt{0{,}999}$.

89.5. Описанный около круга квадрат разрезали на 1000×1000 равных квадратиков и отобрали те из квадратиков, которые не выходят за пределы круга. Доказать, что площадь полученной фигуры составляет не менее 99% от площади всего круга.

89.6. Найти значение $(3^{100} + 4^{100})/(2^{100} + 5^{100})$ с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

89.7. Из 50-значного числа извлекли квадратный корень, потом ещё раз, потом опять — и так сделали 50 раз. Доказать, что полученное число записывается как единица, после которой стоит запятая и как минимум 10 нулей.

89.8. В последовательности $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что n-й член не меньше $(3/2)^n$.

89.9. Выяснить, существует ли натуральное n, при котором выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100.$$

(Указание: может ли быть $1/100 + 1/101 + \ldots + 1/n$ больше $1/2$?)

89.10. (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + 0{,}99^3 + \ldots + 0{,}99^n \geqslant 100.$$

89.11. (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \geqslant 100.$$

89.12. (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geqslant 100.$$

89.13. (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 100.$$

* * *

89.14. Пусть a_n — число знаков в десятичной записи числа 3^n. Доказать, что дроби $a_{1000}/1000$ и $a_{2000}/2000$ отличаются не более чем на $1/100$.

89.15. Не пользуясь калькулятором, найти 4 знака после запятой в числах $\sqrt{1{,}001}$ и $\sqrt{0{,}999}$.

89.16. Найти 1000 знаков после запятой в числе $(\sqrt{37} + 6)^{1000}$.

89.17. Можно ли поместить в квадрат несколько непересекающихся кругов так, чтобы их суммарная площадь составляла бы более 99% площади всего квадрата?

89.18. Последовательность строится так: два первых её члена — произвольные положительные числа, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих. Найти отношение 10-го члена к 9-му с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

89.19. Последовательность строится так: первое число равно 1, а каждое следующее число y получается из предыдущего x по формуле $y = (x + (2/x))/2$. Доказать, что её 5-й член отличается от $\sqrt{2}$ менее чем на одну миллионную.

89.20. Доказать, что
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

89.21. (Продолжение) Показать, что левая часть этого неравенства увеличивается с ростом n.

89.22. Последовательность чисел строится так: первое число равно 1, каждое следующее число y получается из предыдущего x по формуле $y = x + 1/x^2$. Найдётся ли в этой последовательности член, больший 100?

89.23. Последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$ строится по правилу: $x_1 = 1$, а $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Доказать, что $x_{n^2} \geqslant n$.

89.24. (Продолжение) Доказать, что $x_{100} > 14$.

89.25. (Продолжение) Найти целую часть x_{100}.

89.26. Выяснить, существует ли натуральное n, при котором выполняется неравенство
$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}} \geqslant 100.$$

89.27. Доказать что при любом n сумма
$$\sin 1+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\ldots+\frac{\sin n}{n}$$
не превосходит 10. (Углы измеряются в радианах.)

Здесь собраны разные задачи, которые в более общем виде встретятся в систематическом курсе анализа и потому могут рассматриваться как пропедевтика такового (если вы понимаете. о чём мы толкуем, как говорила Сова в книге о Винни-Пухе).

В задаче 89.16 добавление малого сопряжённого числа даёт целое число. Рекуррентная формула задачи 89.19 даёт очень быструю сходимость (на каждом шаге значение x^2-2 возводится в квадрат). В задачах 89.20 и 89.21, как легко догадаться, полезен бином Ньютона. Задачи 89.22 и 89.23 легко решить «от противного»: если все члены меньше 100 (или меньше n), то на каждом шаге прибавку легко оценить снизу. В задачах 89.24 и 89.25 этого наблюдения недостаточно; более точную оценку можно получить, посмотрев, как меняется x_n^2. Ответ в задаче 89.25 равен 14. В задаче 89.27 по существу нужно воспользоваться преобразованием Абеля и ограниченностью сумм синусов.