90. Малые изменения

90.1. Два положительных числа изменили — каждое не более чем на 1% от его прежнего значения. Могла ли их сумма измениться более чем на 10%? более чем на 2%? Те же вопросы для их разности и для их произведения.

90.2. Число x изменили не более чем на 0,01. Доказать, что его синус (то есть синус угла в x радиан) изменился не более чем на 0,01.

90.3. (Продолжение) Верны ли аналогичные утверждения для косинуса и для тангенса?

90.4. Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что его площадь изменилась не более чем на 3%.

90.5. Число x изменили не более чем на 0,1. Может ли значение x^2 измениться более чем на 10? Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

90.6. Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $(1+x)^2 \approx 1+2x$ не превосходит 1% от $|x|$. (Погрешностью приближённой формулы называется разница между левой и правой частями.)

90.7. (Продолжение) Та же задача для приближённой формулы $1/(1-x) \approx 1+x$.

90.8. (Продолжение) Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $1/(1-x) \approx 1+x+x^2$ не превосходит 1% от x^2.

* * *

90.9. Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что радиус вписанной окружности изменился не более чем на 10%.

90.10. Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что радиус описанной окружности изменился не более чем на 10%.

90.11. Три стороны треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Может ли его площадь измениться более чем на 3%?

90.12. Число x изменили не более чем на 0,01. Может ли значение $\sin x^2$ измениться более чем на 1?

90.13. Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ не превосходит 1% от x.

90.14. Придумать приближённую формулу для $\sqrt[3]{1+x}$ (для малых x) и оценить её погрешность при $|x| < 0{,}001$.

90.15. Показать, что при больших x есть приближённая формула $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \approx 1/(2\sqrt{x})$: при $x > 1000$ погрешность не превосходит 1% от правой части формулы.

90.16. Доказать, что при x от 0 до $\pi/2$ выполнены неравенства $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$. Вывести из этого, что при $|x| < 0{,}01$ погрешность приближённой формулы $\sin x \approx x$ не превосходит 1% от x. (Углы измеряются в радианах.)

90.17. (Продолжение) Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $\cos x \approx 1 - x^2/2$ не превосходит 1% от x^2. (Углы измеряются в радианах.)

Здесь на конеретных примерах иллюстрируются понятия непрерывности, равномерной непрерывности и формула Тейлора.

В задаче 90.4 важно понять, что один из углов будет меньше или равен 60°, а другой — больше или равен 60° (но останется острым!) В задачах 90.9 и 90.10 применимы формулы $r = S/p$ и

$R = abc/4S$ для радиусов вписанной и описанной окружностей. Задача 90.17 легко решается с помощью формулы $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$.