91. Математический анализ: разные задачи

91.1. Точки прямой раскрашены в два цвета: чёрный и белый (есть и те, и другие). Доказать, что есть две точки разного цвета на расстоянии меньше 0,01.

91.2. Все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots$ лежат на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что можно найти отрезок длиной $1/1000$, содержащий бесконечно много членов последовательности.

91.3. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называется *невозрастающей*, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots$, и *неубывающей*, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$. Показать, что из любой бесконечной последовательности можно выбросить часть членов так, чтобы осталась бесконечная неубывающая или невозрастающая последовательность.

91.4. Существует ли последовательность с таким свойством: любой интервал (a, b) (где $a < b$) содержит бесконечно много членов этой последовательности?

91.5. Может ли последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?

91.6. Доказать, что из 11 бесконечных десятичных дробей можно всегда выбрать две, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

91.7. Все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots$ лежат на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что можно выбросить часть членов так, чтобы осталась бесконечная последовательность $y_1, y_2, \ldots$, для которого $|y_2 - y_1| \leqslant 1/2$, $|y_3 - y_2| \leqslant 1/4$ и вообще $|y_{i+1} - y_i| \leqslant 1/2^i$.

91.8. На плоскости выбрано 100 различных точек. Доказать, что можно провести прямую таким образом, чтобы на ней не лежало ни одной точки, по одну сторону было 43 точки, а по другую — 57 точек.

91.9. Найти коэффициенты a и b, если известно, что прямая $y = ax + b$ проходит через точку $(1, 1)$ и имеет единственную общую точку с параболой $y = x^2$. Нарисовать прямую и параболу на одном чертеже.

91.10. Найти коэффициенты a и b, если известно, что прямая $y = ax + b$ проходит через точку $(2,\ 1/2)$ и имеет единственную общую точку с гиперболой $y = 1/x$. Нарисовать прямую и гиперболу на одном чертеже.

* * *

91.11. Будем (в этой задаче) обозначать сумму цифр натурального числа a через $s(a)$. Пусть даны два натуральных числа a и b, причём $a < b$ и $s(a) < s(b)$. Показать, что на отрезке от a до b можно найти натуральное число с любой наперёд заданной суммой цифр в интервале от $s(a)$ до $s(b)$.

91.12. Даны три последовательности натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots)$. Доказать, что можно найти два номера i и j, для которых $i < j$, и при этом $a_i \leqslant a_j$, $b_i \leqslant b_j$ и $c_i \leqslant c_j$.

91.13. Функция f ставит в соответствие каждому действительному числу x некоторое действительное число $f(x)$, причём $|f(y) - f(x)| \leqslant (y - x)^2$ для всех x и y. Что можно сказать о функции f?

91.14. Часть плоскости, находящаяся между графиком гиперболы $y = 1/x$ и осью абсцисс, разделена на куски вертикальными прямыми с абсциссами $1, a, a^2, a^3 \ldots$ (где $a > 1$ — некоторое число). Доказать, что площади всех кусков равны.

91.15. (Продолжение) Будет ли часть плоскости, ограниченная графиком гиперболы $y = 1/x$, осью абсцисс и прямой $x = 1$, иметь конечную или бесконечную площадь?

91.16. (Продолжение) Используя предыдущую задачу, доказать, что сумма $1+1/2+1/3+\ldots+1/n$ может быть больше 1000.

91.17. (Продолжение) Сформулируйте и решите аналогичные задачи для кривой $y = 1/(x\sqrt{x})$.

91.18. Пусть S_1 — площадь фигуры, ограниченной графиком $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Пусть S_2 — площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Найти $S_1 + S_2$.

91.19. Доказать, что не всякое целое положительное число, большее 1000, можно представить в виде $2^x + 3^y + 4^z + 5^u + 6^v + w$, где x, y, z, u, v — целые положительные числа, а w — целое положительное число, меньшее 1000.