92. Задачи устного экзамена

Экзамен проводился по следующей схеме. Каждому школьнику в начале экзамена выдавались 4 задачи из некоторого набора. Любую задачу можно было рассказать (один раз), получив за её решение плюс или минус, либо отказаться от задачи, получив за неё ноль. В любом случае задача заменялась на новую; таким образом, в течение всех 4 часов у всех было на руках по 4 нерешённых задачи.

Часть задач была взята из листочков первых двух лет: 35.10, 35.14, 35.15, 35.16, 35.17, 35.18, 35.20, 35.21, 36.12, 36.13, 36.14, 36.15, 37.13, 39.8, 39.10, 39.14, 39.16, 39.17, 39.18, 39.19, 39.22, 39.23, 40.12, 40.13, 40.14, 42.14, 42.17, 42.18, 43.15, 45.10, 45.11, 45.13, 45.14, 45.17, 46.12, 46.15, 46.16, 46.17, 47.16, 47.17, 47.18, 47.22, 49.11, 49.12, 50.10, 50.11, 52.10 (для незамкнутого забора), 52.15, 53.8, 53.10, 54.10, 54.11, 54.15, 55.11, 55.12, 55.13, 57.14, 57.15, 57.18, 58.11, 58.13, 60.12, 60.13, 60.15, 60.16, 61.10, 61.13, 61.16, 64.10, 65.11, 65.13, 66.8, 66.10, 67.8, 67.9, 68.5, 68.6, 68.7, 68.11, 68.13, 68.14, 69.2, 69.4, 70.12, 70.13, 72.2, 72.4, 73.5, 73.8, 73.9, 73.10, 73.11, 73.17, 76.11, 76.12, 76.21, 76.25, 76.27, 79.12, 79.14, 80.15, 80.17, 80.18, 80.23, 80.24, 81.16, 81.17, 81.18, 82.3, 82.4, 82.7, 83.11, 83.14, 84.6, 84.9, 84.10, 84.21, 86.13, 86.14, 87.3, 87.4, 88.12, 88.16, 89.2, 90.4.

Кроме того, предлагались следующие задачи:

92.1. Композиция n симметрий равна композиции m симметрий. Что можно сказать про m и n?

92.2. Точки A и B находятся в противоположных четвертях перекрестка двух дорог найдите кратчайший маршрут из A в B, если дороги можно переходить только перпендикулярно.

92.3. В угол α, образованный двумя зеркалами влетел солнечный луч и не попал в вершину. Докажите, что он вылетит обратно. При каких α он вылетит в противоположном направлении?

92.4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов натуральных чисел.

92.5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

92.6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

92.7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

92.8. Найдите целые m и n, не равные нулю, такие, что $|m + n\sqrt{5}| < 0.001$.

92.9. Найдите целые m и n, не равные нулю, такие, что $|m + n\sqrt{7}| < 0.001$.

92.10. Найти сумму k-х степеней всех корней n-й степени из 1.

92.11. Найти сумму

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1)2^n.$$

92.12. При каких $z, w \in \mathbb{C}$ расстояние между точками z и w больше расстояния между z^2 и w^2?

92.13. Найти сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 99 \cdot 100$.

92.14. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 100}.$$

92.15. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}.$$

92.16. Найти все такие $z\in\mathbb{C}$, что z, z^2, z^3, z^4 образуют квадрат.

92.17. Какое наибольшее значение может принимать сумма $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|+|e-a|$, если числа a, b, c, d, e лежат на отрезке $[0,1]$?

92.18. Найти минимум выражения $a^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(1-c)^2$.

92.19. Существуют ли такие числа x и y, что $\sin y-\sin x=(y-x)/57$?

92.20. Доказать, что если треугольник не является равносторонним, то существует другой треугольник той же площади и меньшего периметра.

92.21. Доказать, что если треугольник не является равносторонним, то существует другой треугольник того же периметра и большей площади.

92.22. Сколько существует троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 10$?

92.23. Доказать, что количество троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 10$, равно количеству троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0<a<b<c<14$.

92.24. На каждом шаге кузнечик прыгает вправо или влево на 1 см по прямой. Он сделал 17 шагов и сдвинулся вправо на 9 см. Сколькими способами он мог это сделать?

92.25. Найти максимальное значение произведения ab, если a и b — неотрицательные действительные числа, и $a+2b\leqslant 1$.

92.26. Все шесть координат вершин треугольника — целые числа, и его площадь равна S. Доказать, что число $2S$ — целое.

92.27. По кругу написано несколько чисел, и каждое есть среднее арифметическое двух соседей. Доказать, что все числа равны.

92.28. Есть 10 целых чисел. Всегда ли из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на 7?

92.29. Есть 10 целых чисел. Всегда ли из них можно выбрать 5 чисел, сумма которых делится на 7?

92.30. Могут ли в последовательности Фибоначчи два числа, стоящие через одно, оба делиться на 17?

92.31. Доказать, что если число a^2+b^2 делится на 7, то a^2+b^2 делится на 49 (a и b — целые числа).

92.32. Может ли в прямоугольном треугольнике с целыми сторонами гипотенуза быть чётной, а один из катетов — нечётным?

92.33. Можно ли построить угол в 7°, имея угол в 37°?

92.34. На какое максимальное число частей могут делить плоскость 17 окружностей?

92.35. Какой остаток даёт число $1^2+2^2+3^2+\ldots+57^2$ при делении на 7?

92.36. Бывают ли такие три отрезка, что любые два из них несоизмеримы?

92.37. Найти число знаков в десятичной записи числа 3^{100} с ошибкой не более чем в 10%.

92.38. Сколько чисел от 1 до 1000 взаимно просто с числом 1001?

92.39. Найти сумму $1+3+5+7+\ldots+999$.

92.40. Всегда ли среди 100 целых чисел можно найти две различные группы с одинаковой суммой?

92.41. Всегда ли среди 100 шестизначных чисел можно найти две непересекающиеся группы с одинаковой суммой?

92.42. Доказать, что в любой строке треугольника Паскаля сумма членов с чётными номерами (считая от начала строки) равнв сумме членов с нечётными номерами.

92.43. Доказать, что в треугольнике Паскаля есть бесконечно много строк, в которых все числа нечётны.

92.44. Доказать, что любое целое число рублей, более 400, можно заплатить купюрами по 17 рублей и 19 рублей (без сдачи).

92.45. По кругу стоят 7 чисел, сумма любых трёх подряд идущих больше 5. Доказать, что сумма всех чисел больше 11.

92.46. Известно, что $a^2+b^2+c^2=9$, $a+b+c=5$. Найти $ab+bc+ac$.

92.47. На окружности помечено 10 точек. Сколькими способами можно провести 5 непересекающихся хорд с вершинами в этих точках?

92.48. Окружность радиуса 2π нарисована на клетчатой бумаге со стороной 1. Какое максимальное число клеток она может пересекать? (Считаются лишь пересечения с внутренностью клетки.)

92.49. Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая проходит ровно через один узел?

92.50. Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая проходит ровно через два узла?

92.51. Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая не подходит ни к одному узлу ближе чем на $1/10$ стороны клетки?

92.52. Может ли окружность проходить через 12 точек плоскости с целыми координатами?