64. Осевая симметрия

Точка A' называется *симметричной* точке A *относительно прямой* l (называемой *осью симметрии*), если отрезок AA' перпендикулярен этой прямой и делится ей пополам. Каждая точка прямой l считается симметричной самой себе.

64.1. 1. Точки A и A' симметричны относительно прямой l, точка X лежит на этой прямой. Доказать, что отрезки XA и XA' равны и образуют равные углы с прямой l.

64.2. Точка A лежит внутри острого угла α с вершиной в точке O, точки A' и A'' симметричны ей относительно сторон угла. Найти угол $A'OA''$.

64.3. Точка A симметрична точке B относительно прямой l, точка B симметрична точке C относительно прямой m, наконец, точка C симметрична точке A относительно прямой n. Доказать, что прямые l, m и n либо пересекаются в одной точке, либо параллельны друг другу.

64.4. Доказать, что симметрия сохраняет расстояния: если точки A' и B' симметричны A и B относительно некоторой прямой, то расстояния AB и $A'B'$ равны.

64.5. Доказать, что симметрия сохраняет прямые: если точки A, B и C лежат на одной прямой, то симметричные им точки A', B' и C' также лежат на одной прямой.

64.6. Даны две точки A и B, не лежащие на прямой l. Найти на прямой l точку X, для которой сумма AX и BX минимальна. (Точки A и B могут лежать по разные стороны от l или по одну сторону.)

64.7. (Продолжение) Найти точку X, для которой разность расстояний AX и BX максимальна по абсолютной величине. Всегда ли такая точка существует?

64.8. Луч света, отражающийся по закону «угол падения равен углу отражения», выпускают внутри угла в 1° с зеркальными стенками. Сколько раз он отразится от стенок? (Указать все возможности.)

* * *

64.9. Даны две параллельные прямые l и m. Выбрав точку A произвольно, построим точку B, симметричную A относительно прямой l, а затем точку C, симметричную B относительно прямой m. Доказать, что расстояние AC не зависит от выбора точки A.

64.10. Внутри острого угла выбрана точка A. Построить точки B и C, лежащие на сторонах этого угла (по одной на стороне), для которых периметр треугольника ABC минимален.

64.11. Картонный треугольник, все стороны которого различны, перекатывают по плоскости (отражая симметрично относительно сторон). Доказать, что можно добиться, чтобы стороны треугольника оказались параллельны своему начальному положению, но треугольник оказался бы в другом месте плоскости.

64.12. В остроугольном треугольнике найти три точки на сторонах, являющиеся вершинами треугольника с минимальным периметром.

64.13. Даны две прямые, пересекающиеся под углом 25°, и некоторая точка A, которая отражается симметрично относительно этих прямых (сколько угодно раз и в любом порядке). Отметим все точки, которые могут получиться таким образом. Сколько их будет? (Ответ зависит от положения точки A. Указать все возможности.)

64.14. Что получится в предыдущей задаче для других углов между прямыми?

64.15. Шар отражается от стенок прямоугольного бильярда по закону «угол падения равен углу отражения». Фиксированы две точки A и B внутри бильярда. Сколькими способами шар может попасть из A в B, испытав 1 отражение? 2 отражения? n отражений? (Для простоты можно забыть про случаи, когда шар попадает в угол.)

64.16. Доказать, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.

64.17. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $MA + MB > CA + CB$.

64.18. По разные стороны от прямой l даны точки A и B. Построить точку O на прямой l так, чтобы лучи OA и OB образовывали равные углы с прямой l.