65. Центральная симметрия

Точки A и A' называются *симметричными относительно точки* O (называемой *центром симметрии*), если точка O является серединой отрезка AA'.

65.1. Доказать, что если точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно некоторой точки O, то отрезки AB и $A'B'$ равны и параллельны.

65.2. Доказать, что если три точки лежат на одной прямой, то и симметричные им (относительного некоторого центра) точки также лежат на одной прямой.

65.3. Фиксированы две точки L и M. Взяв произвольную точку A, мы строим точку B, симметричную ей относительно L, а затем точку C, симметричную B относительно M. Доказать, что расстояние AC не зависит от выбора точки A.

65.4. Дан угол и точка внутри него. Провести через точку прямую, отрезок которой между сторонами угла делится этой точкой пополам. (Другими словами: найти на сторонах данного угла точки, симметричные друг другу относительно данного центра.)

65.5. Даны три точки A, B и C. Построить точку, которая после трех последовательных симметрий с центрами в A, B и C (в указанном порядке) возвращается в исходное положение.

65.6. Доказать, что точки, симметричные точкам заданной окружности относительно заданного центра, лежат на окружности.

65.7. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую, на которой эти окружности отсекают равные хорды.

65.8. Двое по очереди кладут монеты на прямоугольный стол, причем они не должны накрывать друг друга и падать со стола. Сдвигать уже лежащие монеты нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Как должен играть первый, чтобы выиграть?

65.9. Дан параллелограмм $ABCD$ (вершины указаны по часовой стрелке) и точка X. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные CX, DX, AX и BX (соответственно). Доказать, что эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

* * *

65.10. На плоскости бывают центральная и осевая симметрии, в пространстве аналогичных им видов симметрий три. Как вы думаете, что это за симметрии?

65.11. На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, идущие в указанном порядке, причём $AB = CD$. Доказать, что $AP + PD \geqslant BP + PC$ для любой точки P на плоскости.

65.12. Через точку O внутри треугольника требуется провести прямую, отрезок которой внутри треугольника делится точкой O пополам. Сколько решений имеет задача? (Ответ зависит от точки O. Требуется нарисовать, для каких точек задача имеет то или иное число решений.)

65.13. Провести через заданную точку внутри угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

65.14. Четырёхугольник вписан в окружность. Из середины каждой из его сторон опущена высота на противоположную сторону. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.