66. Повороты

Симметрию можно рассматривать как поворот на 180°. Можно рассматривать повороты на меньшие углы: *поворот вокруг точки* O (называемой *центром поворота*) *на угол* α переводит точку X в точку X′, для которой $OX = OX'$ и $\angle X'OX = \alpha$, причём вращение происходит против часовой стрелки («в положительном направлении», как говорят). Поворот на тот же угол по часовой стрелке называют «поворотом на $-\alpha$».

В соответствии с этим определением повороты на $+180°$ и на $-180°$ представляют собой центральную симметрию.

66.1. Доказать, что поворот сохраняет расстояния: если точки A′ и B′ получаются из точек A и B поворотом на некоторый угол α вокруг некоторой точки O, то $AB = A'B'$.

66.2. (Продолжение) Доказать, что прямые AB и A′B′ пересекаются под углом α.

66.3. Доказать, что точки, лежавшие на одной прямой (окружности), после поворота (вокруг данной точки на данный угол) остаются лежать на одной прямой (окружности).

66.4. Дана точка и две прямые. Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в данной точке, а две другие лежат на данных прямых. Сколько решений может иметь эта задача?

66.5. Отрезок AC разбит на две части точкой B, и на отрезках AB и BC как на сторонах построены равносторонние треугольники APB и BQC (по одну сторону от AC). Доказать, что середины отрезков AQ и PC образуют с точкой B равносторонний треугольник.

66.6. Внутри квадрата ABCD (вершины перечислены по часовой стрелке) взята точка M и проведены отрезки AM, BM, CM и DM. В треугольниках AMB, BMC, CMD и DMA проведены высоты из точек A, B, C и D соответственно. Доказать, что они (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

66.7. 7. На сторонах AB и BC ромба ABCD, в котором угол B равен 120°, взяты точки M и N, причём $MB = NC$. Доказать, что треугольник MND равносторонний.

* * *

66.8. Через заданную точку внутри окружности провести хорду заданной длины.

66.9. Вписать квадрат в заданный параллелограмм.

66.10. Символ «инь-янь» выглядит так: на горизонтальном отрезке AC как на диаметре строится круг с центром в B; к верхнему полукругу добавляется (нижний) полукруг с диаметром AB и отнимается верхний полукруг с диаметром BC. Как разделить полученную фигуру на 7 равных частей?

66.11. Дан остроугольный треугольник ABC. Найти точку X, для которой сумма расстояний $AX + BX + CX$ минимальна. (Ответ: из этой точки все стороны верны под углом 120°.)