67. Параллельный перенос

Направленным отрезком называют отрезок, у которого один из концов объявлен «началом»; $\overrightarrow{AB}$ обозначает направленный отрезок с началом A и концом B.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если они равны по длине, направлены в одну сторону и параллельны (или лежат на одной прямой).

67.1. Даны четыре точки A, B, C и D. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ в том и только том случае, если $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

67.2. (Продолжение) ...и в том и только случае, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

67.3. Доказать, что если (для данных шести точек A, B, C, A', B', C') $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, то и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Пусть задан направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Параллельный перенос на $\overrightarrow{AB}$ переводит произвольную точку X в точку X', для которой $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

67.4. Доказать, что параллельный перенос (вслед за поворотами и симметриями) сохраняет расстояния, переводит прямые в прямые и окружности в окружности.

67.5. Даны две точки A и B и две прямые c и d. Найти на прямых c и d точки C и D, для которых $ABCD$ является параллелограммом (вершины которого идут в указанном порядке). Сколько решений может иметь эта задача?

67.6. Деревни А и Б разделены рекой (берега — параллельные прямые). Где надо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы общий путь от А до Б через мост был наименьшим?

67.7. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Доказать, что можно построить четырёхугольник, стороны которого равны AM, BM, CM и DM, а диагонали равны сторонам исходного прямоугольника.

* * *

67.8. Деревни А и Б расположены по разные стороны прямой железной дороги. Где надо построить платформу заданной длины, чтобы суммарное расстояние от А и Б до платформы было наименьшим? (Расстоянием до платформы считается расстояние до ее ближайшей точки.) Сколько решений имеет задача?

67.9. Имеется много одинаковых плиток, имеющих форму неправильного выпуклого четырёхугольника. Доказать, что ими можно замостить плоскость. (Плитки разрешается переворачивать.)

67.10. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся обеих прямых.

67.11. Фигура на клетчатой бумаге имеет площадь N. Доказать, что её можно сдвинуть параллельно себе так, чтобы она покрыла (а) не менее N вершин клеток; (б) не более N вершин клеток. (Клетки имеют единичные стороны.)

Понятие «направлены в одну сторону» служит предметом долгих (и мало понятных школьникам) обсуждений в учебнике геометрии, не стоит настаивать на каких-либо обоснованиях в этом вопросе. Задача 67.3 является простым следствием задачи 67.1. Задача 67.4 уже в который раз намекает на то, что важно только сохранение расстояний — в надежде, что школьники догадаются до этого сами. В задаче 67.5 надо сдвинуть одну из прямых и пересечь её с другой, так что возможно 0, 1 или бесконечно много решений (в отличие от аналогичной задачи про поворот, где можно было поворачивать прямую в две стороны). Задача 67.6 — пример задачи, в которой надо подвергать переносу часть картинки. (Среди дополнительных задач есть аналогичная задача 67.8, которая чуть сложнее из-за того, что можно идти к любому месту платформы.)

Дополнительная задача 67.9: сложив две плитки, получим шестиугольник с параллельными противоположными сторонами, который можно сдвигать параллельно себе.

Задача 67.11 — классическая иллюстрация принципа усреднения: математическое ожидание числа попавших узлов при случайном (в торе) переносе фигуры равно площади. Другими (и более понятными для школьников) словами, мы разрезаем клетчатую бумагу, на которой нарисована фигура, на квадратики, складываем их в стопку, считаем число слоёв, прокалываем иглкой в нужном месте, раскладываем обратно и сдвигаем так, чтобы места прокола совпали с узлами сетки. Не стоит рассказывать решение — эта задача вполне стоит того, чтобы быть предметом долгих размышлений!