68. Композиции преобразований

Пусть F и G — два преобразования (например, симметрии, повороты и т.п.). Их *композицией* называется преобразование, которое получается, если сначала применить F, а потом G. Это преобразование обозначается $G \circ F$ (обратите внимание, что преобразования выполняются справа налево). Аналогично определяется композиция трёх и более преобразований.

68.1. Какое преобразование является композицией двух осевых симметрий, оси которых пересекаются?

68.2. Какое преобразование является композицией двух осевых симметрий, оси которых параллельны?

68.3. Какое преобразование является композицией поворотов на $40°$ и $60°$ с одним и тем же центром? Какое преобразование является композицией поворотов на $100°$ и $150°$ с одним и тем же центром?

68.4. Какое преобразование является композицией двух центральных симметрий?

68.5. Какое преобразование является композицией центральной симметрии и параллельного переноса?

68.6. Какое преобразование является композицией трёх центральных симметрий? четырёх центральных симметрий?

68.7. Доказать, что композиция двух поворотов (возможно, с разными центрами) есть поворот, угол которого равен сумме углов каждого из поворотов (с точностью до кратных $360°$) или перенос, если эта сумма равна нулю. (Указание: представьте каждый поворот как композицию двух осевых симметрий; свобода в выборе осей позволяет взять в качестве одной оси прямую, соединяющую центры поворотов.)

68.8. Композиция некоторых трёх поворотов на угол $120°$ (каждый) является тождественным преобразованием (оставляет все точки на месте). Доказать, что центры поворотов лежат в вершинах равностороннего треугольника.

68.9. На сторонах треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что композиция поворотов на $120°$ вокруг центров этих треугольников (в надлежащем порядке) является тождественным преобразованием. (И, как показывает предыдущая задача, их центры образуют равносторонний треугольник!)

68.10. Какое преобразование является композицией параллельного переноса и поворота?

* * *

68.11. Доказать, что для данного многоугольника с чётным числом сторон можно построить бесконечно много других, у которых будут те же середины сторон, но что многоугольник с нечётным числом сторон определяется их серединами однозначно.

68.12. Доказать, что композиция двух поворотов на $90°$ представляет собой центральную симметрию, и что её центр образует с центрами поворотов прямоугольный равнобедренный треугольник.

68.13. На двух сторонах треугольника вовне его построены квадраты. Доказать, что отрезок, соединяющий их центры, виден из середины третьей стороны треугольника под прямым углом.

68.14. Доказать, что композиция трёх осевых симметрий, оси которых — биссектрисы треугольника ABC, есть осевая симметрия. Найти её ось.

В этом листке происходит (по-видимому) трудный переход от понятия симметричных точек, поворота треугольника и т.п. к идее преобразования как единого объекта. Не нужно требовать формальных доказательств, достаточно отчётливого понимания происходящего.

Задачи 68.1, 68.2 и 68.4 по существу уже были. В задаче 68.3 полезно спросить, как разумно определять поворот на углы больше 360° (которых в курсе геометрии не бывает). В задаче 68.5 можно обратить внимание школьников на то, что её можно решить, представив параллельный перенос как композицию центральных симметрий с подходящими центрами, так что она сводится к 68.4. Но дело это трудное, так что настаивать не стоит, тем более что это всё равно встретится при решении задачи 68.6. Задача 68.7 — видимо, самая трудная (но и самая важная) задача листка, и тут надо постараться добиться понимания происходящего. Можно так или иначе убедиться в наличии неподвижной точки, затем (как это будет при классификации движений) выводить отсюда, что это поворот, затем изучать угол поворота и т.п. Простое решение (представим повороты как композиции осевых симметрий, причём выберем одну ось общей, чтобы всё сократилось), видимо, неизбежно будет выглядеть трюком, но показать его надо. Задачи 68.8 и 68.9 показывают, как абстрактные разговоры о поворотах позволяют просто решить содержательную геометрическую задачу (аналогичная пара задач есть и среди дополнительных).

В дополнительной задаче 68.11 полезно обсудить не только единственность, но и существование многоугольника с заданными серединами сторон (хотя связь этих вопросов станет ясной только в курсе линейной алгебры)