70. Классификация движений

Мы рассматривали различные виды преобразований плоскости — симметрии, повороты, перенос и т.п. Вообще преобразованием плоскости называется любое правило, которое для каждой точки плоскости определяет, в какую точку она переходит.

Преобразование называется *движением*, если оно сохраняет расстояния, то есть любые две точки переходят в две точки, находящиеся на том же расстоянии. (В частности, разыне точки переходят в разные.)

70.1. Доказать, что если движение оставляет на месте три точки, не лежащие на одной прямой, то оно является тождественным преобразованием (оставляет на месте все точки).

70.2. Доказать, что если движение оставляет на месте две разные точки A и B, то оно оставляет на месте все точки прямой AB.

70.3. Даны два движения, которые одинаково действуют на трёх точках A, B и C, не лежащих на одной прямой. Доказать, что эти движения совпадают (т.е. одинаково ведут себя для всех точек).

70.4. Доказать, что движение, оставляющее на месте какие-то две точки, является либо тождественным, либо осевой симметрией.

70.5. Доказать, что движение, оставляющее на месте хотя бы одну точку, является либо осевой симметрией, либо поворотом вокруг этой точки (возможно, на нулевой угол, то есть тождественным проеобразованием).

70.6. Придумать движение, которое не является ни поворотм, ни переносом, ни симметрией (осевой или центральной). Как представить его в виде композиции уже известных нам видов движений? (Ответ есть в одной из следующих задач.)

70.7. Говорят, что два движения перестановочны (коммутируют), если их композиции в двух разных порядках дают одно и то же движение. Перестановочны ли два параллельных переноса? два поворота с одним и тем же центром? с разными центрами? две осевые или центральные симметрии? В каком случае параллельный перенос и осевая симметрия перестановочны?

70.8. Говорят, что движение обращает ориентацию, если оно переводит букву R в букву Я. Если же буква R остается латинской, то говорят, что движение сохраняет ориентацию. Какие из известных вам движений сохраняют ориентацию, а какие меняют её?

70.9. Про два движения известно, сохраняют они ориентацию или обращают. Что можно сказать про их композицию?

70.10. Доказать, что любое движение можно представить в виде композиции параллельного переноса и поворота (и тогда оно сохраняет ориентацию) либо в виде композиции параллельного переноса и осевой симмметрии (и тогда оно меняет ориентацию). (Указание. Посмотрим, куда переходит какая-то точка A — можно найти параллельный перенос, переводящий её туда же, и останется сделать поворот или осевую симметрию.)

70.11. (Теорема Шаля) Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии и переноса на отрезок, параллельный оси симметрии (эти два преобразования перестановочны). Показать, что любое движение является либо поворотом, либо переносом, либо скользящей симметрией (частным случаем которой мы считаем осевую симметрию).

70.12. По двум прямым дорогам едут две машины с постоянными и равными скоростями.

Доказать, что есть такая точка, от которой в любой момент времени машины находится на одинаковом расстоянии. (Дороги не параллельны.)

70.13. Может ли композиция 1997 осевых симметрий быть поворотом?

* * *

70.14. Доказать, что всякое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, является наложением (для любой точки A существует точка B, переходящая в неё при этом преобразовании).