73. Гомотетия

Преобразование *гомотетии* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ переводит каждую точку A в точку B, находящуюся на прямой OA в k раз дальше от O, чем A. При положительном k точка B находится с той же стороны от O, что и точка A; при отрицательном k — с противоположной.

73.1. Что такое гомотетии с коэффициентом 1 и -1? Какое преобразование обратно к гомотетии с коэффициентом k? (Если некоторое преобразование переводит точку X в точку Y, то *обратное* к нему преобразование переводит Y в X.)

73.2. Доказать, что при гомотетии все расстояния увеличиваются в одно и то же число раз (какое?), прямые переходят в прямые, а окружности в окружности.

73.3. Даны два параллельных отрезка разной длины. Указать два преобразования гомотетии, переводящие первый отрезок во второй. (Почему существенно, чтобы длины были разными?)

73.4. Доказать, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

73.5. Дана окружность и точка внутри неё. Построить хорду, которая делится этой точкой в отношении $1:2$. При каком соотношении между радиусом окружности r и расстоянием a от точки до центра окружности это возможно?

73.6. Вписать квадрат в данный треугольник (две вершины должны лежать на одной стороне, две остальные — по одной на каждой из двух оставшихся сторон).

73.7. Доказать, что композиция двух гомотетий снова является гомотетией, причём центры всех трёх гомотетий лежат на одной прямой.

73.8. Даны три окружности различных радиусов. Для каждой пары окружностей нашли точку пересечения их общих внешних касательных. Доказать, что эти три точки лежат на одной прямой.

73.9. Доказать, что точки пересечения высот, серединных перпендикуляров и медиан треугольника лежат на одной прямой. В каком отношении одна из этих точек делит отрезок между двумя другими?

73.10. В окружности проведены два радиуса. Построить хорду, которая делится этими радиусами на три равные части.

73.11. Через данную точку внутри угла провести окружность, касающуюся сторон угла.

73.12. Два квадрата имеют параллельные стороны. Доказать, что четыре прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

* * *

73.13. Сформулировать аналог задачи 73.8, использующий общие внутренние касательные наряду с внешними.

73.14. Преобразованием подобия называется преобразование, которое меняет все расстояния в одно и то же число раз. (Это число называется *коэффициентом подобия*.)

73.15. Доказать, что всякое преобразование подобия является композицией движения и гомотетии.

73.16. Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, не равным 1, имеет неподвижную точку.

73.17. Две карты Москвы разного масштаба (отображающие один и тот же участок местности) положили друг на друга. Доказать, что их можно проколоть иголкой так, чтобы оказалось проколотой одна и та же точка (на местности).

73.18. По двум прямым дорогам с постоянными, но разными скоростями едут две машины. Доказать, что можно встать так, чтобы видимый угол между машинами был бы неизменным.

73.19. На стене висят двое часов. Доказать, что прямые, соединяющие концы минутных стрелок в разные моменты времени, проходят через одну точку.

73.20. Если все стороны выпуклого многоугольника отодвинуть на единицу, то получится многоугольник, подобный исходному. Доказать, что в многоугольник можно вписать окружность.

73.21. Доказать, что в любой выпуклый многоугольник можно поместить два непересекающихся многоугольника, подобных исходному с коэффициентом $1/2$.

73.22. Вершины двух правильных n-угольников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ пронумерованы по часовой стрелке, начиная с их общей вершины $A_1 = B_1$. Доказать, что прямые $A_2B_2, A_3B_3, \ldots, A_nB_n$ проходят через одну точку.