75. Слабо?

75.1. Двое игроков ставят коней на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Кто не может сделать хода, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

75.2. Океаны покрывают больше половины поверхности Земли. Доказать, что есть две симметричные относительно центра Земли точки, приходящиеся на океан.

75.3. Фигура на клетчатой бумаге имеет площадь N. Доказать, что её можно сдвинуть параллельно себе так, чтобы она покрыла (а) не менее N вершин клеток; (б) не более N вершин клеток. (Клетки имеют единичные стороны.) [=67.9]

75.4. Выпуклая фигура на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1) имеет площадь больше 4. Один из узлов сетки является центром симметрии. Доказать, что фигура покрывает ещё хотя бы один узел (лемма Минковского).

75.5. Даны две концентрические окружности. Построить прямую, на которой точки пересечения с этими окружностями высекают три равных отрезка.

75.6. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой, а две другие — на сторонах данного угла.

75.7. Два треугольника симметричны друг другу относительно двух различных прямых. Доказать, что они — равносторонние.

75.8. Точка O находится внутри выпуклого n-угольника, не имеющего параллельных сторон. Доказать, что есть не более n прямых, проходящих через O и делящих площадь многоугольника пополам.

75.9. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую, если задана разность длин хорд, высекаемых на этой прямой окружностями.

75.10. Даны две точки A и B по одну сторону прямой l. Найти такую точку X, что в траектории AXB угол падения вдвое больше угла отражения.

75.11. Доказать, что площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c, d не превосходит (а) $(ab + cd)/2$; (б) $(ac + bd)/2$.

75.12. Может ли ограниченная фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

75.13. Фигура имеет чётное число осей симметрии. Доказать, что некоторые две из них перпендикулярны.

75.14. Может ли ограниченная фигура иметь ось симметрии и не принадлежащий ей центр симметрии ?

75.15. На отрезке AB имеется $2n$ точек, образующих n симметричных (относительно середины отрезка) пар. Из этих $2n$ точек некоторые n покрашены в синий цвет, остальные в красный. Доказать, что сумма расстояний от красных точек до A равна сумме расстояний от синих точек до B.

75.16. Угол, изготовленный из прозрачного материала, двигают так, что две непересекающиеся окружности касаются его сторон внутренним образом. Доказать, что на нём можно отметить точку, которая описывает дугу окружности.

75.17. Найти все движения, перестановочные с поворотом на 90° вокруг данной точки. [=74.9]

75.18. Две соседние вершины квадрата лежат на окружности радиуса 1. Каково максимально возможное расстояние от других двух вершин квадрата до центра окружности?

75.19. (а) Окружность пересекает все три стороны треугольника. Доказать, что её радиус больше радиуса вписанной окружности. (б) Доказать, что для любого треугольника радиус описанной окружности по крайней мере вдвое больше радиуса вписанной. Для каких треугольников они отличаются ровно вдвое?

75.20. Единичный квадрат раскрашен в черный и белый цвет, причём никакие две чёрные точки не находятся на расстоянии 0,1. Доказать, что площадь чёрной части квадрата не превосходит (a) 0,6; (b) 0,4. [=74.10]

75.21. Вписать в данный треугольник другой, стороны которого параллельны сторонам третьего. (Первый и третий даны, второй надо построить.)

75.22. Дан луч с началом в O и точка A, не лежащая на нём. Построить на луче точку M, для которой $OM : MA = 1 : 3$

75.23. Указать фигуру, которая симметрична двум фигурам рис. 75.1 (стоящей и лежащей единицам) относительно некоторых прямых.

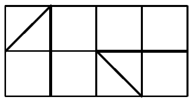

Рис. 1

75.24. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Доказать, что этот шестиугольник имеет центр симметрии. [=69.8]

75.25. Существует ли (не обязательно ограниченная) фигура, имеющая ровно два центра симметрии? [=69.9]

75.26. Какое максимальное число осей симметрии может иметь семиугольник? [=69.10]

75.27. Доказать, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке, и углы между соседними равны. [=69.11]

75.28. Доказать, что фигура, имеющая три оси симметрии, не проходящие через одну точку, не может быть ограниченной. [=69.12]

75.29. Доказать, что всякое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, является наложением (для любой точки A существует точка B, переходящая в неё при этом преобразовании). [=70.14]

75.30. Деревни А и Б расположены по разные стороны прямой железной дороги. Где надо построить платформу заданной длины, чтобы суммарное расстояние от А и Б до платформы было наименьшим? (Расстоянием до платформы считается расстояние до ее ближайшей точки.) Сколько решений имеет задача? [=67.8]

75.31. Имеется много одинаковых плиток, имеющих форму неправильного выпуклого четырёхугольника. Доказать, что ими можно замостить плоскость. (Плитки разрешается переворачивать.) [=67.9]

75.32. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся обеих прямых. [=67.10]

75.33. Доказать, что для данного многоугольника с чётным числом сторон можно построить бесконечно много других, у которых будут те же середины сторон, но что многоугольник с нечётным числом сторон определяется их серединами однозначно. [=68.11]

75.34. Доказать, что композиция двух поворотов на 90° представляет собой центральную симметрию, и что её центр образует с центрами поворотов прямоугольный равнобедренный треугольник. [=68.12]

75.35. На двух сторонах треугольника вовне его построены квадраты. Доказать, что отрезок, соединяющий их центры, виден из середины третьей стороны треугольника под прямым углом. [=68.13]

75.36. Доказать, что композиция трёх осевых симметрий, оси которых — биссектрисы треугольника ABC, есть осевая симметрия. Найти её ось. [=68.14]

75.37. Четырёхугольник вписан в окружность. Из середины каждой из его сторон опущена высота на противоположную сторону. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. [=65.14]

75.38. На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, идущие в указанном порядке, причём $AB = CD$. Доказать, что $AP + PD \geqslant BP + PC$ для любой точки P на плоскости. [=65.11]

75.39. На плоскости бывают центральная и осевая симметрии, в пространстве аналогичных им видов симметрий три. Как вы думаете, что это за симметрии? [=65.10]

75.40. Через точку O внутри треугольника требуется провести прямую, отрезок которой внутри треугольника делится точкой O пополам. Сколько решений имеет задача? (Ответ зависит от точки O. Требуется нарисовать, для каких точек задача имеет то или иное число решений.) [=65.12]

75.41. Провести через заданную точку внутри угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади. [=65.13]

75.42. Дан остроугольный треугольник ABC. Найти точку X, для которой сумма расстояний $AX + BX + CX$ минимальна. (Ответ: из этой точки все стороны верны под углом 120°.) [=66.11]

75.43. Вписать квадрат в заданный параллелограмм. [=66.9]

75.44. Через заданную точку внутри окружности провести хорду заданной длины. [=66.8]

75.45. Символ «инь-янь» выглядит так: на горизонтальном отрезке AC как на диаметре строится круг с центром в B; к верхнему полукругу добавляется (нижний) полукруг с диаметром AB и отнимается верхний полукруг с диаметром BC. Как разделить полученную фигуру на 7 равных частей? [=66.10]