76. Многочлены

Многочлены получаются из чисел и переменных, если их складывать, вычитать и умножать. Раскрывая скобки, каждый многочлен можно преобразовать в сумму *одночленов* (произведений чисел и переменных), после чего привести *подобные* члены (отличающиеся лишь числовыми *коэффициентами*).

76.1. Какие коэффициенты будут при ab^9 и a^8b^2 в многочлене $(a+b)^{10}$ после раскрытия скобок и приведения подобных?

76.2. Найти коэффициент при ab^2c^3 в многочлене $(a+b+c)^6$.

76.3. Найти наибольший коэффициент в многочлене $(a+b)^{10}$.

76.4. (Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.

76.5. Разложить на множители a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, a^5-b^5, a^6-b^6.

76.6. Разложить на множители a^3+b^3, a^4+b^4, a^5+b^5, a^6+b^6.

76.7. Разложить на множители $(x+y)^{10}-z^{12}$

76.8. Перемножить $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{19})$.

76.9. Найти $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{19})$ при $x=3$.

76.10. Доказать, что $x^2+x+1>0$ при любом x.

76.11. Доказать, что $x^2+xy+y^2=0$, только если $x=0$ и $y=0$.

* * *

76.12. Найти наибольший коэффициент в многочлене $(a+2b)^{10}$.

76.13. (Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.

76.14. Найти сумму всех коэффициентов в $(a+b-c)^{10}$.

76.15. (Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, не содержащих a.

76.16. (Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, содержащих b.

76.17. Перемножить $(1-x)^2(1+2x+3^2+4x^3+\ldots+20x^{19})$.

76.18. Найти $(1+2x+3^2+4x^3+\ldots+20x^{19})$ при $x=2$

76.19. Может ли $x^2+5xy+7y^2$ быть отрицательным?

76.20. Может ли $2x^2+5xy+3y^2$ быть отрицательным?

76.21. Доказать, что многочлен $x^2y^2+x^2-2xy+1$ положителен при любых x и y. Может ли он быть меньше 0,001?

76.22. Доказать, что если $x+y+z=0$, то $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.

76.23. (Продолжение) Разложить на множители многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

76.24. Доказать, что если $x^3+y^3+z^3=3xyz$, то либо все числа x, y и z равны, либо их сумма равна нулю.

76.25. Разложить на множители многочлен x^5+x+1.

76.26. Можно ли разложить на множители многочлен x^2+y^2-1 (ни один из множителей не должен быть константой)?

76.27. Может ли в произведении двух многочленов быть меньше одночленов, чем в каждом из них? (Подобные члены считаются за один.)